

ÁLGEBRA

JUNIO 2021

E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases} \quad (1,2 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $\lambda = -1$. (0,8 puntos)

a) Discutir según los valores del parámetro λ

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{array} \right)$$

Estamos ante un sistema homogéneo por tanto el rango de A será igual que el rango de A^* . Estudiamos el determinante de la matriz A.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 1 + 2 - (1 - \lambda - 2\lambda) = 3 + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

- $\lambda \neq -1$ $\text{rango}A = \text{rango}A^* = 3 = n^\circ \text{ incógnitas}$, por el teorema de Rouché-Fröbenius se trata de un *SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO*

- $\lambda = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \quad \text{rango}A = \text{rango}A^* = 2 < n^\circ \text{ incógnitas} \text{ por el teorema de}$$

Rouché-Fröbenius es un *SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO*

b) $\lambda = -1$

$n^\circ \text{ indeterminaciones} = n^\circ \text{ de incógnitas} - \text{rango} = 3 - 2 = 1 \text{ indeterminación}$

Como el rango es 2, cogeremos dos ecuaciones.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad \frac{}{3x = 0} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \gamma \\ z = \gamma \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa. **(1 punto)**

b) Para $n = 2$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

a) Una matriz tendrá inversa si su determinante es distinto de 0. Primero calcularemos A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-1)^2 & 0 \\ n-2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = (-n+1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -n+1$$

Existe la inversa de A^2 para los valores $n \neq 1$.

b) Para $n = 2$ tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = 2I - A \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(2I - A) \Rightarrow X = A^{-1}(2I - A)$$

Calculamos A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(2I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

JULIO 2021**E1.- (Álgebra)**

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - \lambda y = 1 \\ 2x + \lambda z = 1 \end{cases} \quad \textbf{(1,2 puntos)}$$

b) Resolverlo para $\lambda=1$. **(0,8 puntos)**

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - \lambda y = 1 \\ 2x + \lambda z = 1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el determinante de la matriz A .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - (-2\lambda + \lambda) = -\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

- $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 0$ $\text{rango}A = \text{rango}A^* = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas}$, por el teorema de Rouché-Fröbenius es un **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**

- $\lambda = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{rango}A = 2$$

Calculamos el rango de la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \quad \text{rango}A^* = 3$$

$\text{rango}A \neq \text{rango}A^*$ por el Teorema de Rouché-Fröbenius
es un *SISTEMA INCOMPATIBLE*

- $\lambda = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \text{rango}A = 2$$

Calculamos el rango de la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (1 + 1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 + 1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{rango}A^* = 2$$

$$\text{rango}A = \text{rango}A^* < n^{\circ} \text{ incógnitas}$$

por el Teorema de Rouché-Fröbenius es un *SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO*

b) Resolverlo para $\lambda=1$

$n^\circ \text{ indeterminaciones} = n^\circ \text{ de incógnitas} - \text{rango} = 3 - 2 = 1 \text{ indeterminación}$
 Como el rango es 2, cogeremos dos ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{OTRA FORMA: } \begin{cases} x=t \\ y=-1+t \\ z=1-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$2x + z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\gamma}{2} \\ y = x - 1 = \frac{1-\gamma}{2} - 1 = \frac{1-\gamma-2}{2} = \frac{-\gamma-1}{2} \\ z = \gamma \end{cases}$$

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, hallar la matriz P que verifica que

$$M^{-1}PM = N.$$

(2 puntos)

$$M^{-1}PM = N \Rightarrow MM^{-1}PM = MN \Rightarrow PM = MN \Rightarrow PMM^{-1} = MNM^{-1} \Rightarrow P = MNM^{-1}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$M^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}M^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{|M|} \text{Adj}M^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = MNM^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

GEOMETRÍA

JUNIO 2021

E3.- (Geometría)

a) Hallar la recta perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ que pasa por el punto $A = (0,0,0)$.

(0,8 puntos)

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos $P = (1,1,1)$ y $Q = (1,3,-1)$ son simétricos.

(1,2 puntos)

a) Para obtener la ecuación de una recta necesitamos un punto y un vector.

$$\vec{v}_r = \vec{n}_\alpha = (1,1,1) \text{ y } A = (0,0,0)$$
$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow x = y = z$$

b) recta $r: \begin{cases} P = (1,1,1) \\ \vec{v}_r = \vec{PQ} = (0,2,-2) \end{cases}$

$$\vec{v}_r = \vec{n}_\alpha,$$

por tanto para conocer la ecuación del plano solo necesitamos un punto que pertenezca al plano. Ese punto será el punto medio entre P y Q .

$$x_m = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$y_m = \frac{1}{2}(1+3) = 2$$

$$z_m = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

Utilizando la ecuación normal del plano tenemos:

$$0x + 2y - 2z + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -4$$

$$\pi \equiv 2y - 2z - 4 = 0 \Rightarrow \pi \equiv y - z - 2 = 0$$

E4.- (Geometría)

Dados la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ y el punto $P = (0,0,0)$, hallar la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el punto P .

(2 puntos)

$$r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2} \quad P(0,0,0) \text{ y } P_r = (-1,2,0)$$

$$\vec{n}_\alpha = \vec{v}_r \times \vec{P_rP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{j} + 2\vec{k} - (\vec{k} + 4\vec{i}) = (-4, -2, 1)$$

$$\pi \equiv -4x - 2y + z + D = 0 \Rightarrow -4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\pi \equiv -4x - 2y + z = 0$$

JULIO 2021**E3. (Geometría)**

Dadas las rectas $r \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y s .

(1 punto)

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y s .

(1 punto)

$$\begin{aligned} \text{a) } r &\equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ P_r = (0, -1, 2) \end{cases} \\ s &\equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda, x = \frac{z-3}{2} = \frac{\lambda-3}{2}, y = x + 3 = \frac{\lambda-3}{2} + 3 = \frac{\lambda+3}{2} \\ &\begin{cases} \vec{v}_s = (1/2, 1/2, 1) \\ P_s = (-3/2, 3/2, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

\vec{v}_r y \vec{v}_s son proporcionales \Rightarrow las rectas son paralelas o coincidentes.

Comprobamos si P_r pertenece a s :

OTRA FORMA: vemos $\overrightarrow{P_r P_s}$ no es proporcional al vector director de la recta r y por tanto son paralelas.

$$\left. \begin{aligned} 0 + 1 + 3 &= 0 \\ 2 \cdot 0 - 2 + 3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{no lo cumple por tanto las rectas son paralelas.}$$

b) El plano quedará determinado por $\vec{v}_r, \overrightarrow{P_r P_s}$ y P_r .

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-3/2 - 0, 3/2 + 1, 0 - 2) = (-3/2, 5/2, -2) = (-3, 5, -4)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - 0 & y + 1 & z - 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} -4x - 6(y + 1) + 5(z - 2) - [-3(z - 2) + 10x - 4(y + 1)] \\ = -4x - 6y - 6 + 5z - 10 + 3z - 6 - 10x + 4y + 4 \\ = -14x - 2y + 8z - 18 = 0 \quad \pi \equiv 7x + y - 4z + 9 = 0 \end{aligned}$$

E4.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$

a) Calcular el plano π_1 que pasa por $A = (1, 2, 3)$ y es perpendicular a la recta r . (0,5 puntos)

b) Calcular el plano π_2 que pasa por $B = (-1, 1, -1)$ y contiene a la recta r . (1,5 puntos)

$$\begin{aligned} \text{a) } \pi_1 \begin{cases} A = (1, 2, 3) \\ \vec{n}_\alpha = \vec{v}_r = (1, -1, 2) \end{cases} \\ \pi_1 = x - y + 2z + D = 0 \Rightarrow 1 - 2 + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \\ \pi_1 \equiv x - y + 2z - 5 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \pi_2 \begin{cases} B = (-1, 1, -1) \\ \vec{v}_r = (1, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-1, 1, -1) \\ \overrightarrow{BP_r} = (2, 1, 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x + 1 & y - 1 & z + 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(x + 1) + 4(y - 1) + z + 1 - [-2(z + 1) + \\ 2(x + 1) + 2(y - 1)] = -4x + 2y + 3z - 3 = 0 \end{aligned}$$

ANÁLISIS

JUNIO 2021

E5.- (Análisis)

Representar la función $f(x) = e^{(x^2)}$, determinando antes sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas. (2 puntos)

$$f(x) = e^{(x^2)},$$

- $Dom = \mathbb{R}$

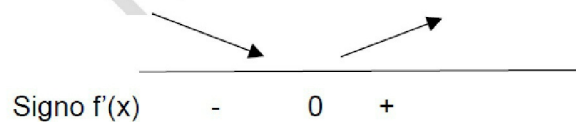
- No hay asíntotas verticales porque el dominio es toda la recta real

No tiene Asíntotas horizontales $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x^2)} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(x^2)} = \infty$ RAMAS PARABÓLICAS

No ha asíntotas oblicuas

- Máximos y mínimos:

$$f'(x) = e^{(x^2)} \cdot 2x = 0 \Rightarrow e^{(x^2)} \neq 0, \quad 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$



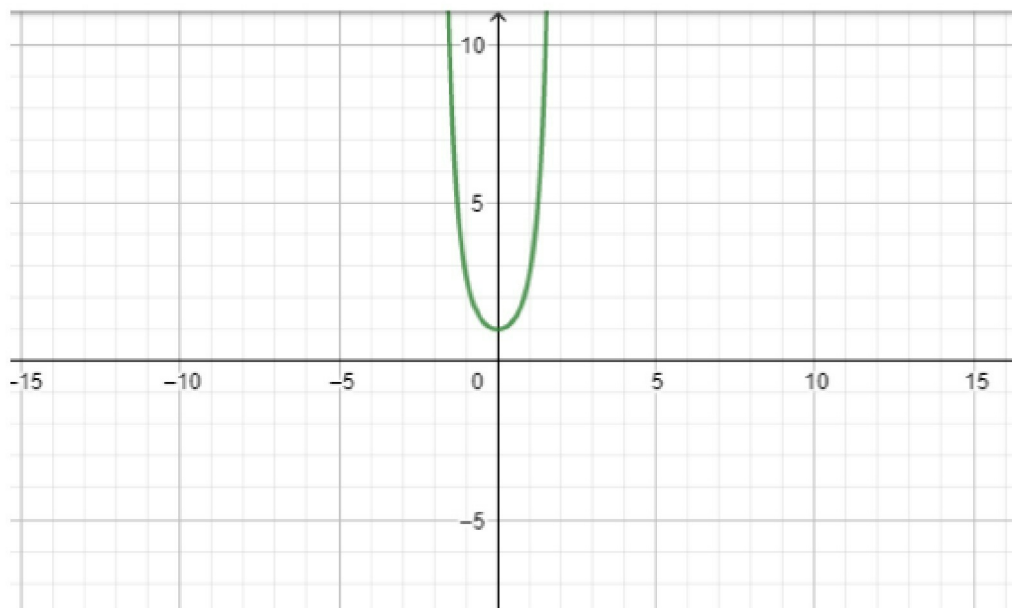
En $x=0$ tenemos un mínimo.

$$f(0) = e^{(0^2)} = 1$$

- Concavidad y convexidad.

$$f''(x) = e^{(x^2)} \cdot 2x \cdot 2x + e^{(x^2)} \cdot 2 = e^{(x^2)} \cdot 4x^2 + e^{(x^2)} \cdot 2 = 2 \cdot e^{(x^2)}(2x^2 + 1) = 0$$

La segunda derivada no se anula nunca, siempre es > 0 $f(x)$ es cóncava en su dominio.



E6.- (Análisis)Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos(3x)}{\sin^2(x)}$.

L'Hôpital

(2 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos 3x}{\sin^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\downarrow}{=}_{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 3 \cdot \sin 3x}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 3 \cdot \sin 3x}{\sin 2x} \quad \text{sen} 2x = 2 \text{sen} x \cos x$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) =_{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 9 \cdot \cos 3x}{2 \cdot \cos 2x} = \frac{10}{2} = 5$$

También derivando $2 \sin x \cos x$
llegamos al mismo límite

E7.- (Análisis)

a) Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 8$, hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que $g(x) \geq f(x)$. (0,5 puntos)

b) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (1,5 puntos)

a) Igualamos ambas funciones para poder estudiar el signo de cada una de las funciones.

$$x^2 = -x^2 + 8 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$(-\infty, -2) f(x) \geq g(x)$$

$$(-2, 2) g(x) \geq f(x)$$

$$(2, +\infty) f(x) \geq g(x)$$

b)

$$\int_{-2}^2 -x^2 + 8 - x^2 dx = \int_{-2}^2 -2x^2 + 8 dx = -\frac{2x^3}{3} + 8x \Big|_{-2}^2 = \frac{64}{3}$$

E8.- (Análisis)

Hallar los valores de a , b y c para los cuales el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ cumple las siguientes condiciones:

- $P(0) = 1$
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en $x = 0$ es $m = 1$.
- $\int_0^2 P(x) dx = 12$. (2 puntos)

$$P(0) = 1 \Rightarrow 1 = c$$

$$P'(0) = +1 \Rightarrow P'(x) = 2ax + b \Rightarrow P'(0) = b = 1$$


$$\int_0^2 P(x) dx = 12 \Rightarrow \int_0^2 ax^2 + bx + c dx = \int_0^2 ax^2 + x + 1 dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_0^2$$

$$= \frac{8}{3}a + 2 + 2 = 12 \Rightarrow \frac{8}{3}a = 8 \Rightarrow a = 3$$

JULIO 2021**E5.- (Análisis)**

Dada la función $f(x) = x^5 - 5x - 1$, determinénse sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión. **(2 puntos)**

$$f(x) = x^5 - 5x - 1 \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Signo $f'(x)$ 

Crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ Decrecimiento: $(-1, 1)$

En $x = -1$ tenemos un máximo. $f(-1) = 3 \Rightarrow (-1, 3)$

En $x = 1$ tenemos un mínimo. $f(1) = -5 \Rightarrow (1, -5)$

$$f''(x) = 20x^3 = 0$$

En $(-\infty, 0)$ $f''(x) < 0 \Rightarrow \cap$ convexa

En $(0, \infty)$ $f''(x) > 0 \Rightarrow \cup$ cóncava

En $x = 0$ hay un punto de inflexión porque la función cambia su curvatura. $(0, -1)$

E6.- (Análisis)

Calcular el valor de $m > 0$ para el cual se verifica que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(mx)}{x^2} = 2$. **(2 puntos)**

L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(mx)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \xrightarrow{\downarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m \cdot \sin mx}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \xrightarrow{\uparrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 \cdot \cos mx}{2} = \frac{m^2}{2} = 2$$

$\Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$

Como $m > 0$ el valor pedido será $m = 2$. L'Hôpital

E7.- (Análisis)

a) Estudiar la continuidad de la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int x \ln(x^2) dx$. **(1 punto)**

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

La función será continua en \mathbb{R} .

b) $\int x \ln(x^2) dx = \int 2x \ln(x) dx =$

$$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 2x dx \quad v = x^2$$

Método de integración por partes

$$= u \cdot v - \int v \cdot du = x^2 \ln x - \int x^2 \frac{1}{x} dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C$$

E8.- (Análisis)

Se considera la función $f(x) = x - \cos(x)$

- a) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$. **(1 punto)**
- b) Probar que la ecuación $f(x) = 0$ solo puede tener una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$, de modo que la solución del apartado anterior es la única. **(1 punto)**

$$f(x) = x - \cos x$$

- a) La función es continua en $[0, \pi/2]$.

$$f(0) = -1 \quad f(\pi/2) = \pi/2$$

$$\text{Como signo } f(0) \neq f(\pi/2)$$

\Rightarrow según el Teorema de Bolzano al menos existe c tal que $f(c) = 0$

- b) La función es continua en $[0, \pi/2]$ y derivable en $(0, \pi/2)$. supongamos que existen dos soluciones

Según el Teorema de Rolle existe c tal que $f'(c) = 0$ a y b tal que $f(a)=f(b)=0$

$$f'(x) = 1 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \quad \text{con } c \in (a, b)$$

En el intervalo $(0, \pi/2)$ el $\sin x > 0$, entonces llegamos a una contradicción y la solución es única.

(por lo que deducimos que no puede cortar en dos puntos, entonces solo cortará en uno)

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**JUNIO 2021****E9.- (Probabilidad y Estadística)**

En un club deportivo, el 55% de los socios son hombres y el 45 % mujeres. Entre los socios, el 60% de los hombres practica la natación, así como el 40% de las mujeres.

- a) Describir los sucesos y sus probabilidades, y calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar practique la natación. **(1,25 puntos)**
- b) Sabiendo que una persona practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? **(0,75 puntos)**

$$P(H)=0,55 \quad P(N/H)=0,6 \quad P(\bar{N}/H)=0,4$$

$$P(M)=0,45 \quad P(N/M)=0,4 \quad P(\bar{N}/M)=0,6$$

a)

H=ser socio hombre

M=ser socio mujer

N=practicar natación

\bar{N} =no practicar natación

$$P(H \cap N) = p(H) \cdot p(N|H) = 0,55 \cdot 0,6 = 0,33$$

$$P(H \cap \bar{N}) = p(H) \cdot p(\bar{N}|H) = 0,55 \cdot 0,4 = 0,22$$

$$P(M \cap N) = p(M) \cdot p(N|M) = 0,45 \cdot 0,4 = 0,18$$

$$P(M \cap \bar{N}) = p(M) \cdot p(\bar{N}|M) = 0,45 \cdot 0,6 = 0,27$$

Calculamos las probabilidades de las intersecciones por la regla del producto.

La probabilidad de que un socio practique natación será:

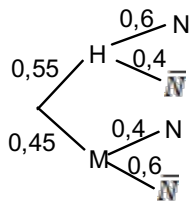
$$p(N) = \underset{\uparrow}{P(H \cap N)} + P(M \cap N) = 0,33 + 0,18 = 0,51$$

b)

Teorema de la probabilidad total

$$p(M/N) = \underset{\uparrow}{\frac{p(M \cap N)}{p(N)}} = \frac{0,18}{0,51} = 0,352$$

Teorema de Bayes



E10.- (Probabilidad y estadística)

El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test para detectar cierta enfermedad sigue una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4.

a) ¿En qué porcentaje de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos? **(1 punto)**

b) ¿Cuántos minutos son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96.41% de los test? **(1 punto)**

a) $N(20,4)$

$$\begin{aligned} p(16 \leq x \leq 26) &= p\left(\frac{16-20}{4} \leq z \leq \frac{26-20}{4}\right) = p(-1 \leq z \leq 1,5) = \\ &= p(z \leq 1,5) - p(z \leq -1) = p(z \leq 1,5) - p(z \geq +1) = \\ &= p(z \leq 1,5) - [1 - p(z \leq 1)] = 0,9332 - [1 - 0,8413] = \\ &= 0,77 \end{aligned}$$

b) $96,41\% \Rightarrow p(z \leq k) = 0,9641$

$$1,80 = \frac{x - 20}{4} \Rightarrow x = 27,2 \text{ minutos}$$

JULIO 2021**E9.- (Probabilidad y Estadística)**

Dentro de una caja hay bolas de varios colores que tienen todas el mismo tamaño y aspecto, siendo algunas de madera y las otras de metacrilato. Concretamente:

- El 48% son blancas y entre ellas dos tercios son de madera.
- El 24% son rojas, y de ellas las tres cuartas partes son de madera.
- El 28% son verdes, de las cuales la mitad son de madera.

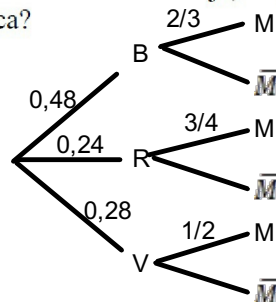
Considerando los sucesos: B = "ser blanca", R = "ser roja", V = "ser verde" y M = "ser de madera"

a) Indicar cuales son los valores de $P(M/B)$, $P(M/R)$ y $P(M/V)$. **(0'3 puntos)**

b) Calcular la probabilidad de que al sacar al azar una de las bolas de la caja, sea de madera. **(0'7 puntos)**

c) Si solo sabemos que una de las bolas de la caja, elegida al azar, es de madera, ¿cual es la probabilidad de que sea blanca? **(1 punto)**

a) $P(M/B) = \frac{2}{3}$
 $P(M/R) = \frac{3}{4}$
 $P(M/V) = \frac{1}{2}$



b) $P(M) = P(B \cap M) + P(R \cap M) + P(V \cap M) = 0,48 \cdot \frac{2}{3} + 0,24 \cdot \frac{3}{4} + 0,28 \cdot \frac{1}{2}$
 \uparrow
 $= 0,64$

Teorema de la probabilidad total

c)

$$p(B/M) = \frac{p(B \cap M)}{p(M)} = \frac{0,48 \cdot \frac{2}{3}}{0,64} = 0,5$$

Teorema de Bayes

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Se sabe que el coeficiente intelectual de la población adulta española sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20.

a) ¿Qué porcentaje de españoles adultos se espera que tengan un coeficiente intelectual entre 95 y 105? **(1 punto)**

b) Si se considera que una persona es superdotada cuando su coeficiente intelectual es mayor que 160, calcular el porcentaje de españoles adultos que son superdotados. **(1 punto)**

a) $N(100,20)$

$$\begin{aligned} p(95 \leq x \leq 105) &= p\left(\frac{95 - 100}{20} \leq z \leq \frac{105 - 100}{20}\right) \\ &= p(-0,25 \leq z \leq 0,25) = p(z \leq 0,25) - p(z \leq -0,25) \\ &= p(z \leq 0,25) - p(z \geq 0,25) \\ &= p(z \leq 0,25) - [1 - p(z \leq 0,25)] \\ &= 0,5987 - [1 - 0,5987] = 0,1974 = 19,74\% \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} p(x > 160) &= p\left(z \geq \frac{160 - 100}{20}\right) = p(z \geq 3) = 1 - p(z \leq 3) = 1 - 0,9987 \\ &= 1,3 \cdot 10^{-3} = 0,13\% \end{aligned}$$