NÚMEROS Y ÁLGEBRA

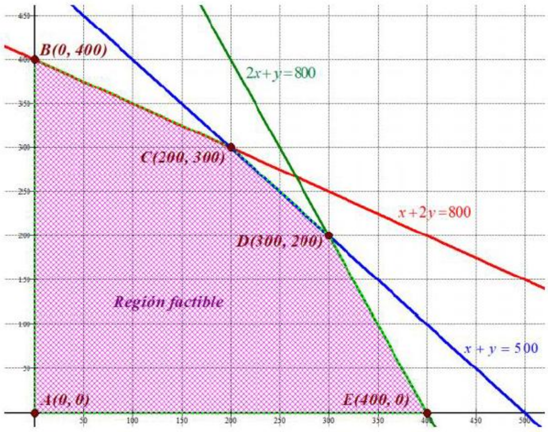
JUNIO 2021

P1. (Números y álgebra)

En un almacén de frutas disponen de 800 kg de manzanas, 800 kg de naranjas y 500 kg de plátanos. Con estas existencias van a poner a la venta dos tipos de lotes de frutas, A y B. El lote A consta de 1 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y 1 kg de plátanos; mientras que el lote B consta de 2 kg de manzanas, 1 kg de naranjas y 1 kg de plátanos. Si los lotes A se venden a 12 euros cada uno y los lotes B a 14 euros cada uno, determinar, mediante técnicas de programación lineal, el número de lotes de cada tipo que ha de vender el almacén para maximizar sus ingresos. ¿A cuánto asciende ese ingreso máximo?

	Kg manzanas	Kg naranjas	Kg plátanos	ingresos
A	1	2	1	12€
B	2	1	1	14€
	800	800	500	

$$\begin{gathered} x + 2y \leq 800 \\ 2x + y \leq 800 \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{gathered}$$



Dibujamos la región factible y determinamos los vértices del recinto solución.
A(0,0), B(0,400), C(200,300), D(300,200) y E(400,0).

La función beneficio será:

$$B(x,y) = 12x + 14y$$

$$\begin{gathered} B(0,0) = 12 \cdot 0 + 14 \cdot 0 = 0 \\ B(0,400) = 12 \cdot 0 + 14 \cdot 400 = 5600 \\ B(200,300) = 12 \cdot 200 + 14 \cdot 300 = 6600 \\ B(300,200) = 12 \cdot 300 + 14 \cdot 200 = 6400 \\ B(400,0) = 12 \cdot 400 + 14 \cdot 0 = 4800 \end{gathered}$$

Los ingresos máximos corresponden a 200 lotes A y 300 lotes B.

P2. (Números y álgebra)

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz $Y = A^2 + BB^t$ donde B^t es la matriz traspuesta de B.

b) Determinar la matriz X para que se verifique la ecuación $2AX = B$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow BB^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Y = A^2 + BB^t = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $2AX = B \Rightarrow AX = \frac{1}{2}B \Rightarrow X = \frac{1}{2}A^{-1}B$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AdjA^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión obtenida inicialmente.

$$X = \frac{1}{2}A^{-1}B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

C1. (Números y álgebra)

Añadir una ecuación al sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$, de forma que el sistema resultante sea incompatible.

Si añadimos una ecuación igual a cualquiera de las anteriores pero con el término independiente cambiado por otro, nos resultará un sistema incompatible.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

JULIO 2021

P1. (Números y álgebra)

En una panadería hornean todos los días tartas y bizcochos que venden a 10 € y 6 €, respectivamente. Para fabricar una tarta se necesitan 400 gramos de harina y 200 de azúcar, mientras que para un bizcocho se utilizan 300 gramos de harina y 100 de azúcar. Los dueños de la panadería saben que diariamente tienen que hornear, al menos, 6 bizcochos. Para la producción de hoy de tartas y bizcochos se dispone de 6 kg de harina y 2.4 kg de azúcar.

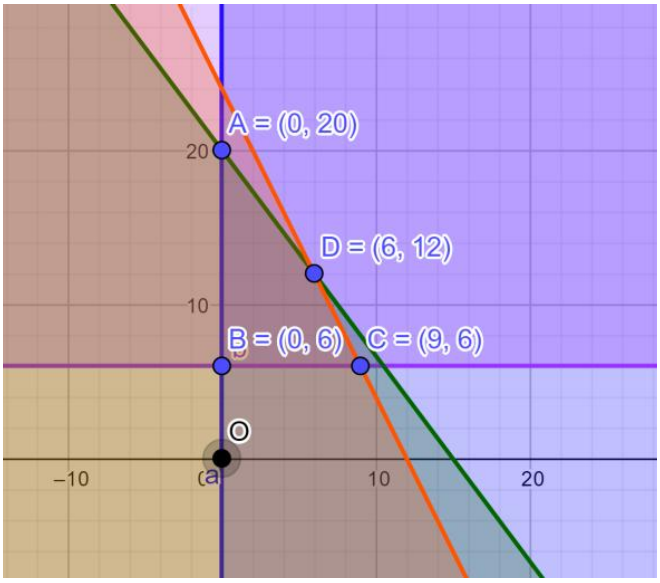
Utilizando técnicas de programación lineal, determinar la cantidad de cada uno de los productos que hay que hornear hoy para obtener los máximos ingresos.

	Harina (g)	Azúcar (g)
Tartas (x)	400	200
Bizcochos (y)	300	100
Total	6000	2400

Programa lineal :

Maximizar z=10x+6y

$$\text{s.a.}\begin{cases} 400x + 300y \leq 6000 \\ 200x + 100y \leq 2400 \\ \quad x \geq 0 \qquad y \geq 6 \end{cases}$$



La región factible es la determinada por los vértices A,B,C, y D

Y el valor de la función objetivo en cada vértice es:

Z_A=120 , Z_B=36 ,Z_C=126 ,Z_D=132

Por lo tanto habrá que hornear 6 tartas y 12 bizcochos para obtener un beneficio máximo de 132€ .

P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - az = 1 \\ x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - az = 1 \\ x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$

A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

|A| = -2 +2 +2a -1 + 2a - 4 = 4a-5 = 0 → a = 5/4

- Si a ≠ 5/4, Rg(A) = Rg(B) = 3 = nº de incógnitas, por lo que será un Sistema compatible determinado.

- Si a = 5/4:

A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5/4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5/4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5/4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-2) \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2-2+2-(1+2+4) \neq 0 \rightarrow Rg(B) = 3$$

Rg (A) = 2, Rg (B) = 3, por lo que es un Sistema Incompatible.

b)

A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -1$

$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4$

$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6$

$|\Delta z| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -9$

X = 4 Y = 6 Z = 9

$$X=\frac{|\Delta x|}{|A|} \quad Y=\frac{|\Delta y|}{|A|} \quad Z=\frac{|\Delta z|}{|A|}$$

C1. (Números y álgebra)

Un hijo tiene 22 años menos que su padre y la suma de sus edades es 46 años ¿qué edad tiene el hijo?

Padre: x → 34 años
Hijo: x - 22 → 12 años

x + x - 22 = 46 → x = 34

ANÁLISIS

JUNIO 2021

P3. (**Análisis**)

El número de zancadas por minuto que realiza un corredor en su entrenamiento diario de 60 minutos viene dado por la función:

$$f(x)=\begin{cases} 70 & \text{si } 0 \le x \le 40 \\ \frac{1}{10}x^2 - 11x + 350 & \text{si } 40 < x \le 60 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo de entrenamiento transcurrido, medido en minutos.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcular el momento en el que alcanza el número de zancadas mínimo. ¿Cuál es el número de zancadas mínimo? (**hasta 2 puntos**).

b) Representar gráficamente la función $f(x)$, justificando brevemente la representación gráfica obtenida (**hasta 1 punto**).

a) En el intervalo (0, 40) la función es constante igual a 70.
En el intervalo (40,60) la función es una parábola. Calculamos su derivada para ver sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{2}{10}x - 11 = 0 \Rightarrow x = 55$$

$$En\ el\ intervalo\ (40{,}55)\ f'(x) < 0, por\ tanto\ la\ función\ decrece.$$

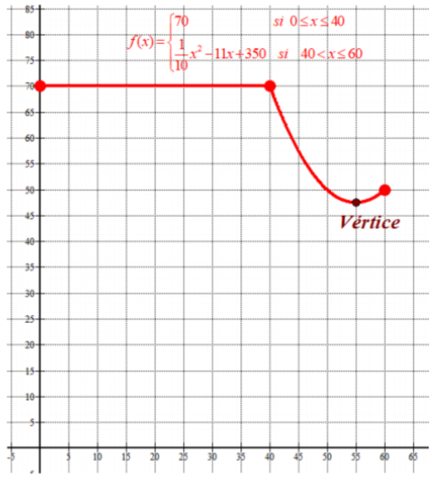
$$En\ el\ intervalo\ (55{,}60)\ f'(x) > 0, por\ tanto\ la\ función\ crece.$$

Con estos datos concluimos que en x=55 tenemos un mínimo con coordenadas (55, f(55))= (55, 47,5). Por lo tanto el número de zancadas mínimo será 47,5.

b) Para representar la función calcularemos el vértice de la parábola.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{11}{2 \cdot {}^{1}/_{10}} = 55 \Rightarrow y_v = 47{,}5$$

x	y
50	50
55	47,5
60	50



P4. (Análisis)

El beneficio neto anual B (en miles de euros) que las ventas de un producto generan a una empresa en función del gasto anual en publicidad x (en miles de euros) viene dado por la función $B(x) = -20x^2 + 1200x + a$, donde $x \in [0, \infty)$.

a) Hallar el valor de a sabiendo que un gasto en publicidad de 10000 euros proporciona un beneficio neto de de 10 millones de euros.

b) Para $a = 2000$, calcular el área delimitada por $B(x)$ y el eje OX en el intervalo [0, 1].

a) Nos proporcionan el dato:

$$B(10) = 10000 \Rightarrow = -20 \cdot 10^2 + 1200 \cdot 10 + a = 10000 \Rightarrow a = 0$$

b) Para a= 2000 la función nos queda:

$$B(x) == -20x^2 + 1200x + 2000$$

$$\int_0^1 = -20x^2 + 1200x + a\,dx = -\frac{20}{3}x^3 + 600x^2 + 2000x\Big]_0^1$$

$$= -\frac{20}{3}1^3 + 600 \cdot 1^2 + 2000 \cdot 1 = 2593{,}33u^2$$

C2. (Análisis)

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$?

El dominio son todos los reales excepto los que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$Dom = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

JULIO 2021

P3. (Análisis)

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de b para que $f(x)$ sea continua.

b) Calcular el área delimitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo (0, 1).

a)

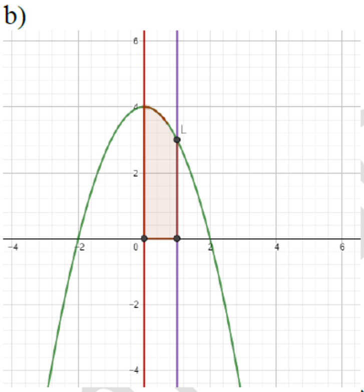
$$\lim_{x\to1^+} \frac{b}{x} = b$$

$$\lim_{x\to1^+} 4 - x^2 = 3$$

f(1) = 3

Para que sea continua: $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) \rightarrow$ b = 3

b)



$\int_0^1 (4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right] = \frac{11}{3}$ unidades cuadradas.

P4. (Análisis)

Los estatutos de una asociación ecologista establecen que la asociación debe disolverse cuando supere los 100 socios. Se sabe, además, que el número de sus socios varía con los años transcurridos desde su fundación, "x", de acuerdo con la función $N(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 64$.

a) ¿Cuántos han sido los socios fundadores? Transcurridos 7 años, ¿cuántos socios habrá? ¿Se disolverá la sociedad en ese momento? (**hasta 1 punto**).

b) Estudiar el comportamiento (crecimiento, decrecimiento) del número de socios en el intervalo [0, 7] ¿cuál será el número mínimo de socios y cuándo se alcanzará? (**hasta 2 puntos**).

a)

Socios fundadores → N(0) = 64

Transcurridos 7 años → N(7) = 134,

socios.

,por lo tanto se disolverá la asociación.

b)

$N' = 3x^2 - 18x + 24$

$3x^2 - 18x + 24 = 0$; x = 4 x = 2

(0 , 2)	(2 , 4)	(4 , 7)
N'(x) > 0	N'(x) < 0	N'(x) < 0
Creciente	Decreciente	Creciente

El mínimo de socios se alcanzará en 4 años y será N(4) = 40.

C2. (Análisis)

Dada la función $f(x) = ax - 33 + \frac{5}{x}$, determinar a para que verifique $f'(1) = 2$.

$f'(x) = a - \frac{5}{x^2}$

$f'(1) = 2 \Rightarrow a - 5 = 2 \Rightarrow \boxed{a = 7}$

<u>ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD</u>

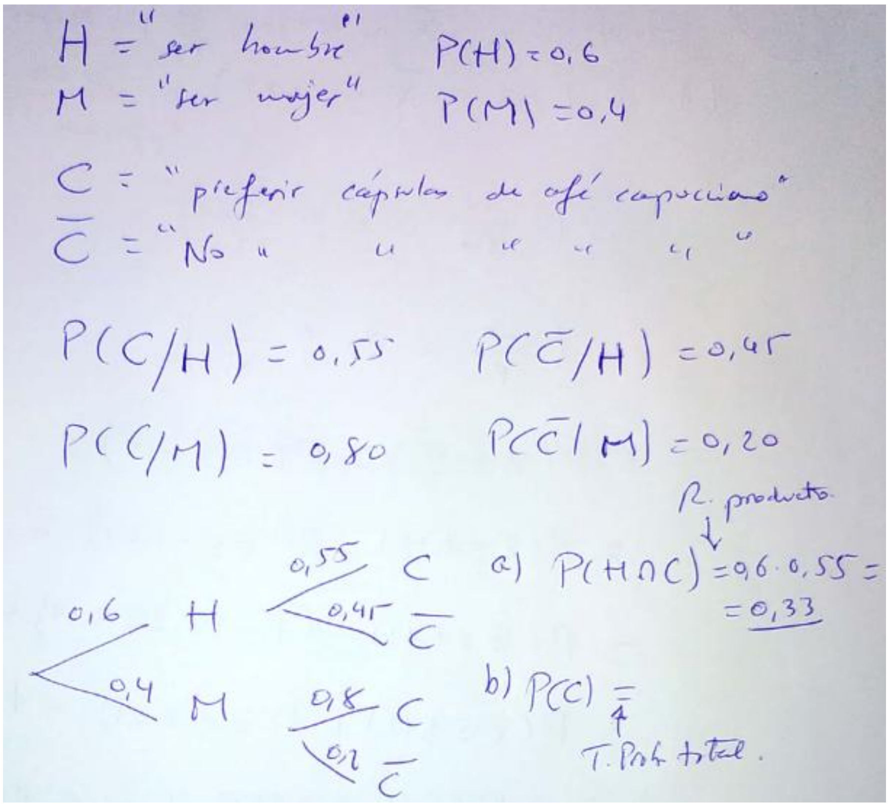
<u>JUNIO 2021</u>

P5. (**Estadística y probabilidad)**

Una empresa destinada a la comercialización de cápsulas de café realiza un estudio de mercado entre un grupo de personas donde el 60 % son hombres y el 40 % restante son mujeres. La empresa comprueba que el 55 % de los hombres prefieren cápsulas de café capuchino, porcentaje que se eleva al 80 % en el caso de las mujeres.

a) Calcular la probabilidad de elegir una persona de ese grupo que resulte ser hombre y que prefiera cápsulas de café capuchino.

b) ¿Con qué probabilidad una persona elegida al azar de ese grupo prefiere cápsulas de café capuchino?



a) $p(H \cap C) = p(H) \cdot p\left({}^{C}/_{H}\right) = 0{,}6 \cdot 0{,}55 = 0{,}33$

b)

$$p(C) = p(H \cap C) + p(\bar{H} \cap C) = p(H) \cdot p\left({}^{C}/_{H}\right) + p(\bar{H}) \cdot p\left({}^{C}/_{\bar{H}}\right)$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}55 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}65$$

P6. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que tarda un auditor en revisar un expediente se ajusta a una distribución normal con media 30 minutos y desviación típica de 10 minutos. Si al principio de una semana se le entregan 75 expedientes:

a) Calcular la probabilidad de que le dé tiempo a revisar los 75 expedientes si en esa semana el auditor trabaja 35 horas (2100 minutos).

b) Calcular la probabilidad de que el tiempo medio dedicado a revisar los 75 expedientes esté entre 28 y 33 minutos.

a)

$X \sim N(\mu, \sigma)$

$Y = \sum X \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$

$X \sim N(30, 10)$

Distribución de la suma $\quad Y = \sum X \sim N(75 \cdot 30\ , 10 \cdot \sqrt{75}) = N(2250; 86{,}6)$

$P(Y \leq 2100)$

a) $N\left(50 \cdot 75, \frac{10 \cdot 75}{\sqrt{75}}\right) = N(2250, 86'6)$

$$p(x \leq 2100) = p\left(z \leq \frac{2100 - 2250}{86{,}6}\right) = p(z \leq -1{,}7352) = p(z \geq 1{,}7352)$$
$$= 1 - p(z \leq 1{,}7352) = 1 - 0{,}9582 = 0{,}0418$$

b) $N\left(30, \frac{10}{\sqrt{75}}\right) = N(30, 1'15)$

$$p(28 \leq \bar{x} \leq 33) = p(-1{,}73 \leq z \leq 2{,}6) = p(z \leq 2{,}6) - p(z \leq -1{,}73)$$
$$= p(z \leq 2{,}6) - [1 - p(z \leq 1{,}73)] = 0{,}9953 - 0{,}0418 = 0{,}9535$$

b) $\quad \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$\bar{X} \sim N\left(30, \frac{10}{\sqrt{75}}\right) = N(30; 1{,}15)$

C3. (Estadística y probabilidad)

Sabiendo que la probabilidad de que un hombre llegue a los 70 años es 0.78 y la probabilidad de que una mujer llegue a los 70 años es 0.83, calcular razonadamente la probabilidad de que ambos lleguen a los 70 años.

Definimos H= ¨Hombre que llega a los 70 años¨ y M= ¨Mujer que llega a los 70 años¨, que son sucesos independientes y aplicando la regla del producto P(H∩M)=P(H)·P(M)

$p(\textit{hombre y mujer lleguen a } 70 \textit{ años}) =$
$p(\textit{hombre llegue a } 70) \cdot p(\textit{mujer llegue a } 70) = 0{,}78 \cdot 0{,}83 = 0{,}6474$

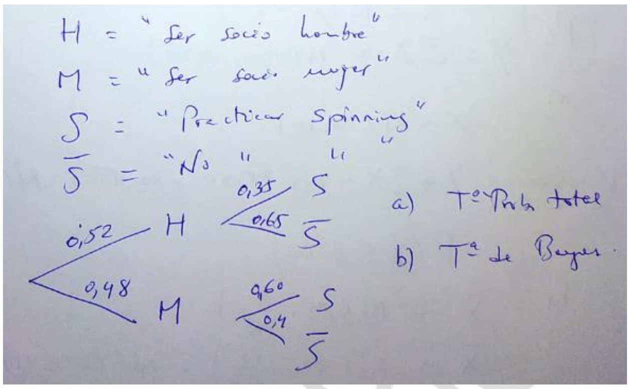
JULIO 2021

P5. (Estadística y probabilidad)

En un gimnasio, el 52 % de los socios son hombres y el resto son mujeres. Entre los socios, el 35 % de los hombres practica "spinning" así como el 60 % de las mujeres. Si elegimos un socio al azar,

a) Calcular la probabilidad de que practique "spinning".

b) Si el socio elegido no practica "spinning", obtener la probabilidad de que sea una mujer.



a)

P(H) = 0,52 P(S|H) = 0,35

P(M) = 0,48 P(S|M) = 0,6

P(S) = P(H)·P(S|H) + P(M)· P(S|M) = 0,47

b)

$P(M|\overline{S}) = \frac{P(M)\cdot P(\overline{S}|M)}{P\overline{S}} \rightarrow P(M|\overline{S}) = \frac{0{,}48\cdot 0{,}4}{1-0{,}47} = 0{,}36$

P6. (Estadística y probabilidad)

El peso de la población adulta con sobrepeso sigue una distribución normal de media 120 kg y desviación típica de 20 kg. Además, a los individuos con un peso superior a 150 kg se les considera "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A".

a) ¿Qué porcentaje de la población de adultos con sobrepeso son "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A"?

b) Si se elige aleatoriamente una muestra de 20 adultos con sobrepeso, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra esté entre 110 kg y 125 kg.

La variable aleatoria X=peso de la población adulta con sobrepeso , sigue una distribución N(120,20)

a)

$\mu = 120 \quad \sigma = 20$

$$P(X \geq 150) = P(Z \geq \frac{150-120}{20}) = P(Z \geq 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5)$$

$$P(X \geq 150) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668 = 6{,}68\%$$

El 6,68 % de la población adulta con sobrepeso tiene riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A.

b) $\bar{X}$~N(μ ,$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$)

$\bar{X} \sim N\left(120, \frac{20}{\sqrt{20}}\right)$ y la probabilidad pedida es:

$$P(110 \leq \bar{X} \leq 125) \underset{\text{tipificamos}}{=} P\left(\frac{110-120}{\sqrt{20}} \leq Z \leq \frac{125-120}{\sqrt{20}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-10}{\sqrt{20}} \leq Z \leq \frac{5}{\sqrt{20}}\right) =$$

$$= P(Z \leq 1{,}12) - P(Z \leq -2{,}24) =$$

$$= P(Z \leq 1{,}12) - (1 - P(Z \leq 2{,}24)) =$$

$$= P(Z \leq 1{,}12) + P(Z \leq 2{,}24) - 1 =$$

$$= 0{,}8686 + 0{,}9875 - 1 = 0{,}8561$$

C3. (Estadística y probabilidad)

La nota media de los alumnos de segundo de bachillerato de cierto instituto sigue una distribución normal de media 6.8 y desviación típica 1.1. Calcular la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de un 9.

μ = 6,8 σ =1,1

$$P(X \geq 9) = P(Z \geq \frac{9-6{,}8}{1{,}1}) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772$$
$$= 0{,}0228$$