Modelo "0" 2021

P5. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que un autobús urbano tarda en realizar su ruta se ajusta a una distribución normal con media de 24 minutos y desviación típica de 8 minutos. Si cada día el autobús realiza 40 veces su ruta:

a) Calcular la probabilidad de que en un día el tiempo medio de las 40 rutas esté entre 22 y 27 minutos.

b) Calcular la probabilidad de que el autobús emplee más de 1080 minutos en total cada día para realizar su ruta esas 40 veces.

$\boxed{P.5}$ Variable aleatoria X = tiempo que tarda el autobús en realizar la ruta.

$X \equiv N(\mu, \sigma) \rightarrow X \equiv N(24, 8)$

$\mu = 24$ minutos

$\sigma = 8$ minutos

$n = 40$ tamaño de la muestra $\geq 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Las medias muestrales siguen una distribución

$\overline{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \overline{X} \equiv N(24; 1{,}265)$

a) Nos piden hallar la probabilidad:

$\boxed{P(22 \leq \overline{X} \leq 27)} \underset{\text{tipificamos}}{=} P\left(\frac{22-24}{1{,}265} \leq Z \leq \frac{27-24}{1{,}265}\right) =$

$= P(-1{,}58 \leq Z \leq 2{,}37) = P(Z \leq 2{,}37) - P(Z \leq -1{,}58) =$

$= P(Z \leq 2{,}37) - (1 - P(Z \leq 1{,}58)) =$

$= P(Z \leq 2{,}37) + P(Z \leq 1{,}58) - 1 = 0{,}9911 + 0{,}9429 - 1 =$

$= \boxed{0{,}934}$

b) Si emplea 1080 minutos en total, la media de ese día es $\frac{1080}{40} = 27$ minutos.

La probabilidad pedida es:

$P\left(\overline{X} > \frac{1080}{40}\right) = P(\overline{X} > 27) \underset{\text{Tipificamos}}{=} P\left(Z > \frac{27-24}{1{,}265}\right) =$

$= P(Z > 2{,}37) = 1 - P(Z \leq 2{,}37) =$

$= 1 - 0{,}9911 = \boxed{0{,}0089}$

P6. (Estadística y probabilidad)

Una academia que prepara oposiciones está evaluando la calidad de sus resultados. Para ello toma una muestra de 50 opositores y comprueba que 20 han aprobado. Con esta información:

a) Determinar los parámetros media y desviación típica de la proporción muestral que estima la proporción de opositores aprobados. Calcular, utilizando la distribución normal asociada, la probabilidad de que la proporción muestral de aprobados esté entre el 35 % y el 45 %. **(hasta 2 puntos)**

b) Calcular un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de opositores aprobados de la academia. **(hasta 1 punto)**

$\boxed{P.6}$ a) $n = 50$ tamaño de la muestra.

20 han aprobado.

$$\mu(p) = \frac{20}{50} = 0{,}4 \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{50}} = 0{,}069$$

$$q = 1 - p \to q = 0{,}6$$

La distribución normal asociada es:

$$\hat{p} \equiv N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \longrightarrow \hat{p} \equiv N(0{,}4 ; 0{,}069)$$

La probabilidad pedida es:

$$P(0{,}35 \leq \hat{p} \leq 0{,}45) \underset{\text{tipificamos}}{=} P\left(\frac{0{,}35 - 0{,}4}{0{,}069} \leq Z \leq \frac{0{,}45 - 0{,}4}{0{,}069}\right) =$$

$$= P(-0{,}72 \leq Z \leq 0{,}72) = P(Z \leq 0{,}72) - P(Z \leq -0{,}72) =$$

$$= P(Z \leq 0{,}72) - (1 - P(Z \leq 0{,}72)) = 2 \cdot P(Z \leq 0{,}72) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}7642 - 1 = \boxed{0{,}5284}$$

b) Intervalo de confianza al 90%

$$I_{90\%} = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} , \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Determinamos $z_{\alpha/2}$ de la tabla de la $N(0,1)$, sabiendo que se cumple que $P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0{,}9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2P(Z \leq z_{\alpha/2}) - 1 = 0{,}9 \Rightarrow P(Z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{1 + 0{,}9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}65$$

Así pues el intervalo de confianza buscado es:

$$\boxed{I_{90\%}} = (0{,}4 - 1{,}65 \cdot 0{,}069 ; 0{,}4 + 1{,}65 \cdot 0{,}069) =$$

$$= \boxed{(0{,}29 ; 0{,}51)}$$

C3. (Estadística y probabilidad)

La ficha técnica del estudio social La vida en la Frontera con Portugal indica que se ha encuestado a 4450 individuos mayores de 14 años, residentes en Castilla y León que viven a menos de 25 km de la frontera con Portugal. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos de la población satisfechos con su zona de residencia es de ±1.4 % fijada una confianza del 95 %.

Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

$\boxed{C.3}$

$n = 4450$ tamaño muestral.

$E = \pm\, 0{,}014$ Error de la estimación.

$\alpha = 0{,}955$ nivel de confianza.

Población: individuos mayores de 14 años, residentes en Castilla y León a menos de 25 km de Portugal.

Diseño muestral: Muestra estratificada con muestreo aleatorio simple por estratos.

Parámetro estimado: proporción de individuos satisfechos con su zona de residencia.

Julio 2020

P5. (Estadística y probabilidad)

El 30 % de los clientes de un banco especializado en microcréditos son hombres y el 70 % son mujeres. Se sabe que el 20 % de los hombres recibieron un crédito inferior a 6000 € mientras que el 72 % de las mujeres recibieron un crédito igual o superior a dicha cantidad.

a) Elegido uno de los clientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que éste haya recibido un crédito inferior a 6000 €?

b) Elegido al azar un cliente entre los que recibieron un crédito inferior a 6000 €, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

a) $p(<6000) = p(H \cap <6000) + p(M \cap <6000) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}7 \cdot 0{,}28 = 0{,}256$

b)

$$p\left({}^{M}/_{<6000}\right) = \frac{p(M \cap <6000)}{p(<6000)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}28}{0{,}256} = 0{,}765$$

P6. (Estadística y probabilidad)

Las pruebas realizadas de un nuevo modelo de teléfono móvil aseguran que la ley de probabilidad de la vida útil del teléfono sin averías (en meses) es normal de media 32 meses y desviación típica 12.5 meses. La campaña de lanzamiento del nuevo modelo ofrece la sustitución gratuita del móvil por cualquier avería aparecida en los primeros 4 meses.

a) Calcular la probabilidad de que haya que sustituir un móvil adquirido durante la campaña de lanzamiento.

b) Si una tienda vende 64 teléfonos móviles del nuevo modelo el primer día de campaña, determinar la probabilidad de que el tiempo medio sin averías de esos móviles sea superior a 36 meses.

a) $N(32, 12{,}5)$

$$p(x \leq 4) = p\left(z \leq \frac{4-32}{12{,}5}\right) = p(z \leq -2{,}24) = p(z \geq 2{,}24) = 1 - p(z \leq 2{,}24)$$
$$= 1 - 0{,}9875 = 0{,}0125$$

b) $N(32, \frac{12{,}5}{\sqrt{64}})$

$$p(\bar{x} \geq 36) = p\left(z \geq \frac{36-32}{1{,}5625}\right) = p(z \geq 2{,}56) = 1 - p(z \leq 2{,}56)$$
$$= 1 - 0{,}9948 = 0{,}0052$$

C3. (Estadística y probabilidad)

Se lanza una moneda 3 veces. Calcular la probabilidad de que se obtenga al menos una cruz.

$$p(al\ menos\ una\ cruz) = 1 - p(0\ cruces) = 1 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

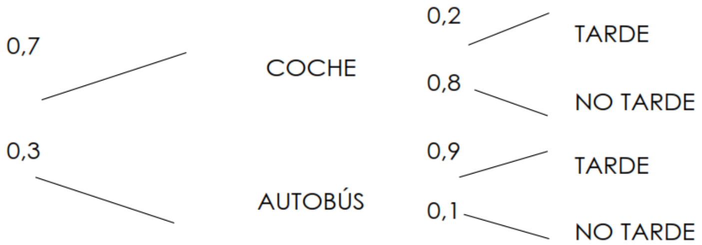
Septiembre 2020

P5. (Estadística y probabilidad)

Para ir a clase, un estudiante utiliza su coche el 70 % de los días, mientras que va en autobús el resto de los días. Cuando utiliza su coche, llega tarde el 20 % de los días, mientras que si va en autobús llega a tiempo el 10 % de los días. Elegido un día al azar:

a) Calcular la probabilidad de que el estudiante llegue tarde.

b) Si ha llegado a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya venido en autobús?



a) $p(T) = p(C \cap T) + p(A \cap T) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}41 \Rightarrow 41\%$

b)

$$p\left({}^{A}/_{\bar{T}}\right) = \frac{p(A \cap \bar{T})}{p(\bar{T})} = \frac{p(A \cap \bar{T})}{p(A \cap \bar{T}) + (C \cap \bar{T})} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}1}{0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}8} = 0{,}05 \Rightarrow 5\%$$

P6. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que tarda el servidor de una empresa de venta *online* en registrar un pedido sigue una ley de probabilidad normal de media 0.16 minutos y desviación típica 0.37 minutos. Al comienzo de un *viernes negro* la empresa recibe 365 pedidos.

a) Calcular la probabilidad de que el servidor tarde más de 73 minutos en registrar los 365 pedidos.

b) Calcular la probabilidad de que el tiempo medio de registro de esos 365 pedidos sea menor o igual que 0.18 minutos.

a) $N(0.16, 0.37) \rightarrow N\left(0.16, \frac{0.37}{\sqrt{365}}\right);\ \sum x \Rightarrow N(58.9, 7.06)$

$$p(x > 73) = p\left(z > \frac{73 - 58{,}4}{7{,}06}\right) = p(z > 2{,}06) = 1 - p(z < 2{,}06)$$
$$= 1 - 0{,}9803 = 0{,}0197 \Rightarrow 1{,}97\%$$

b) $N\left(0.16, \frac{0.37}{\sqrt{365}}\right) = N(0.16, 0{,}019)$

$$p(x \leq 0{,}18) = p\left(z \leq \frac{0{,}18 - 0{,}16}{0{,}0019}\right) = p(z \leq 1{,}052) = 0{,}8531 = 85{,}31\%$$

C3. (Estadística y probabilidad)

La ficha técnica de un sondeo electoral indica que ha encuestado a 1207 individuos de 18 o más años residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada por grupos de edad y sexo, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que acudirá a votar en las próximas elecciones es de ±2.8 % con un nivel de confianza del 95.5 %.

Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño muestral y parámetro estimado.

Población: individuos de 18 o más años residentes en España.
Diseño muestral: aleatorio simple.
Tamaño muestral: 1207 individuos.
Parámetro estimado: individuos que acudirán a votar en las próximas elecciones.

Junio 2019

3A- Las autoridades sanitarias están estudiando los efectos del tabaco en la salud. El tiempo que tarda un fumador en dejar definitivamente de fumar se ajusta a una distribución normal, de media 5 meses y desviación típica 2 meses. Con esta información:
a) Calcula la probabilidad de que un fumador tarde más de 4 meses en dejar definitivamente de fumar? **(1 punto).**
b) Si se toman 50 fumadores, calcula la probabilidad de que el tiempo medio que tardan los 50 fumadores en dejar definitivamente de fumar sea inferior a 6 meses. **(2 puntos)**

X = Tiempo en meses que un fumador tarda en dejar definitivamente de fumar.
X = N(5, 2)

a)

$$P(X>4)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-5}{2}>\frac{4-5}{2}\right)=P(Z>-0,5)=$$
$$=P(Z\leq 0,5)=\boxed{0,6915}$$

b) $N = 50 \rightarrow \overline{X_{50}}=N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\Rightarrow \overline{X_{50}}=N\left(5,\frac{2}{\sqrt{50}}\right)\Rightarrow \overline{X_{50}}=N\left(5,\frac{2}{\sqrt{50}}\right)$

$$P\left(\overline{X_{50}}<6\right)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{\overline{X_{50}}-5}{2/\sqrt{50}}<\frac{6-5}{\frac{2}{\sqrt{50}}}\right)=P(Z<3,54)=\boxed{0,9998}$$

4A- La ficha técnica del estudio social "*Influencers* en redes sociales" indica que se ha encuestado a 1096 individuos de 16 a 55 años de edad residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que se declaran seguidores de *influencers* es de $\pm 3\%$ con un nivel de confianza del 95.5 %.
Para esta ficha técnica, identifica los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

n = 1096

E = ±0,03

∝=0,955

Población: Individuos de 16 a 55 años residentes en España.

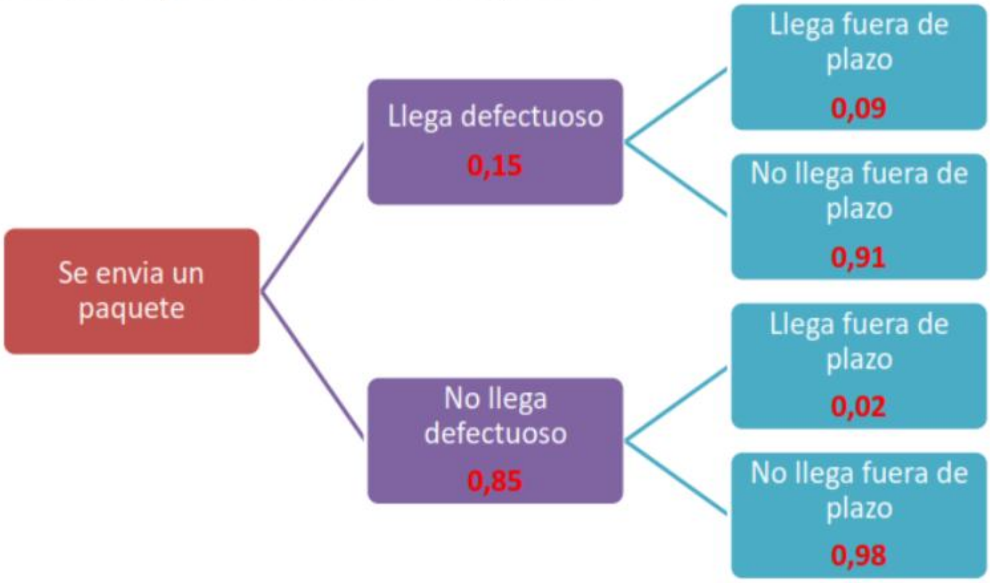
Diseño muestral: Muestra estratificada con muestreo aleatorio simple por estratos.

Tamaño muestral: 1096

Parámetro estudiado: Proporción de individuos seguidores de Influencers.

3B- El 15% de los paquetes repartidos por una empresa de transporte llegan defectuosos. Entre los paquetes que llegan defectuosos un 9% llega fuera de plazo, mientras que entre los no defectuosos sólo un 2 % llega fuera de plazo. Se elige un paquete al azar repartido por esta empresa:
a) Calcula la probabilidad de que el paquete elegido llegue fuera de plazo.
b) Sabiendo que el paquete elegido llega fuera de plazo, ¿qué probabilidad hay de que llegue defectuoso?

Realicemos un diagrama de árbol con los datos del problema.



a)

$$P(\text{Llega fuera de plazo}) = P(\text{Llega defectuoso})P(\text{Llega fuera de plazo/ Llega defectuoso}) +$$
$$+P(\text{No llega defectuoso})P(\text{Llega fuera de plazo/ No llega defectuoso}) =$$
$$= 0{,}15 \cdot 0{,}09 + 0{,}85 \cdot 0{,}02 = \boxed{0{,}0305}$$

b)

$$P(\text{Llega defectuoso /Llega fuera de plazo}) = \frac{P(\text{Llega defectuoso y fuera de plazo})}{P(\text{Llega fuera de plazo})} =$$
$$= \frac{0{,}15 \cdot 0{,}09}{0{,}0305} = \boxed{0{,}443}$$

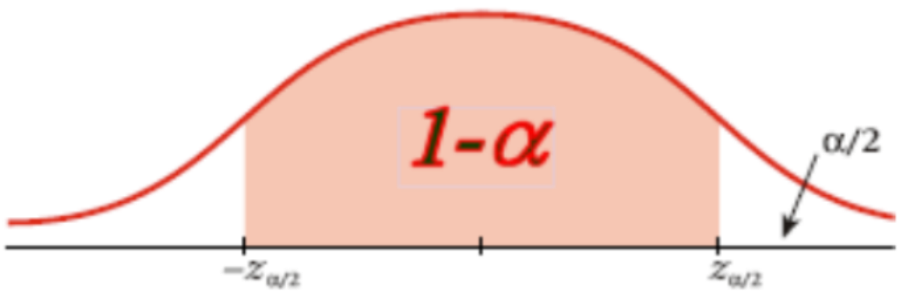
4B- En el aeropuerto A, se toma una muestra de 100 días y se observa que en 25 hay saturación aérea. Con esos datos, se calculan dos intervalos de confianza para el parámetro proporción de días con saturación aérea en el aeropuerto A: [0.122, 0.378] y [0.165, 0.335]
¿Cuál es el intervalo de menor confianza? Justifica tu respuesta.

X = Proporción de días con saturación aérea en el aeropuerto A.

La amplitud del intervalo [0.122, 0.378] es $A_1 = \frac{0,378-0,122}{2} = \frac{0,256}{2} = 0,128$. El error en este intervalo de confianza es $E_1 = \frac{0,128}{2} = 0,064$

La amplitud del intervalo [0.165, 0.335] es $A_2 = \frac{0,335-0,165}{2} = \frac{0,170}{2} = 0,085$. El error en este intervalo de confianza es $E_2 = \frac{0,085}{2} = 0,0425$

Dada la imagen:



Si el nivel de confianza es mayor $(1-\alpha)$ entonces el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es mayor y el error cuya fórmula es

$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$ será mayor. Siendo p, q y n valores iguales.

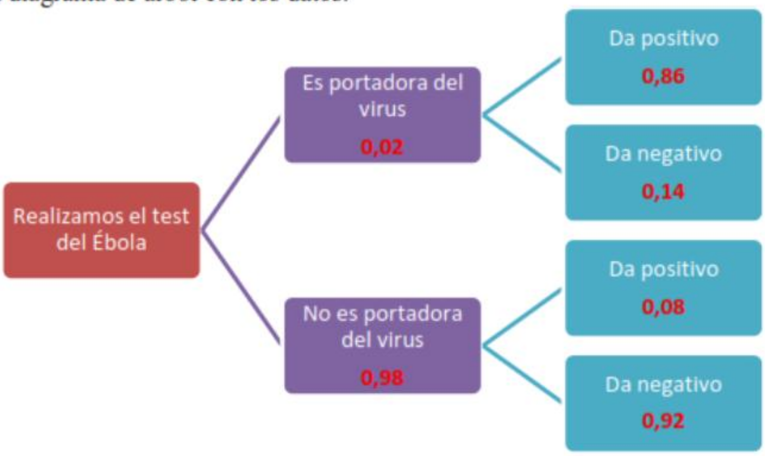
A mayor amplitud del intervalo mayor nivel de confianza.

Por lo tanto el intervalo [0.165, 0.335] tiene menor amplitud y por tanto menor confianza.

Julio 2019

3A- Una multinacional farmacéutica elabora un test para la detección precoz de la enfermedad producida por el virus del Ébola. El test da positivo en el 86% de las personas que son portadoras del virus y da negativo en el 92% de las personas que no son portadoras del virus. Además, en una cierta zona geográfica el 2% de la población es portadora del virus. Se elige al azar una persona de esa zona geográfica y se la somete al test. Calcula razonadamente la probabilidad de que sea portadora del virus sabiendo que el test ha dado positivo.

Realizamos un diagrama de árbol con los datos.



$$P(\text{Portadora del virus / Test ha dado positivo}) = \frac{P(\text{Portadora del virus y Test da positivo})}{P(\text{Test ha dado positivo})} =$$

$$= \frac{P(\text{Portadora del virus y Test da positivo})}{P(\text{Portadora del virus y Test da positivo}) + P(\text{No portadora del virus y Test da positivo})} =$$

$$= \frac{0,02 \cdot 0,86}{0,02 \cdot 0,86 + 0,98 \cdot 0,08} = \frac{172}{172+784} = \frac{172}{956} = \boxed{0,18}$$

4A- Supongamos que tenemos una moneda de 2 euros trucada de manera que la probabilidad de que al lanzarla al aire salga cara es el triple de que salga cruz. Calcula razonadamente la probabilidad de que al lanzarla una vez al aire salga cruz.

Si llamamos p a la probabilidad de salir cruz, se cumple que la probabilidad de salir cara es $3p$. La suma de estas probabilidades es 1, se cumple:

$$p + 3p = 1 \Rightarrow 4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

$\boxed{\text{La probabilidad de salir cruz es } \frac{1}{4}}$ y de salir cara es $\frac{3}{4}$.

OTRA FORMA DE HACERLO

Si la probabilidad de que al lanzar la moneda al aire salga cara es el triple de que salga cruz, debe de ocurrir que por cada vez que salga cruz, saldrá tres veces cara. Cada 4 veces que lance la moneda saldrá una sola vez cruz.

$$\text{Probabilidad de sacar cruz (según la regla de Laplace)} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

3B- Se sabe que el tiempo de resolución de los exámenes propuestos por un profesor universitario sigue una distribución normal de media 74 minutos.
a) Si en el primer examen de este curso la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue 8 minutos, ¿cuál es la probabilidad de haber necesitado para resolver el examen más de los 90 minutos disponibles?
b) En el segundo examen la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue de 9 minutos. Si se presentaron 36 alumnos a este segundo examen, determina la probabilidad de que el tiempo medio de resolución de esos alumnos fuera inferior a 77 minutos.

X = Tiempo de resolución de un examen en minutos.

X = N(74, **σ**)

a) X = N(74, 8).

$$P(X>90)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-74}{8}>\frac{90-74}{8}\right)=P(Z>2)=$$
$$=1-P(Z<0,75)=1-0,9772=\boxed{0,0228}$$

b) X = N(74, 9) → $\overline{X_{36}}=N\left(74,\ \frac{9}{\sqrt{36}}\right)\Rightarrow\overline{X_{36}}=N(74,\ 1'5)$

$$P\left(\overline{X_{36}}<77\right)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{\overline{X_{36}}-74}{1,5}<\frac{77-74}{1,5}\right)=P(Z<2)=\boxed{0,9772}$$

4B- Se consideran dos sucesos independientes A y B. Si la probabilidad de que ocurra A es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es $\frac{1}{3}$, calcula la probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B.

$P(A)=0,5$ y $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

A y B son independientes → $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot P(B)\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{P(B)}{2}\Rightarrow P(B)=\frac{2}{3}$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{5}{6}=\boxed{\frac{1}{6}}$$