Julio 2020

P1. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -3x+2y-5z=2 \\ x+2y-az=-1 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a (**hasta 2 puntos**).

b) Resolver el sistema para $a=-2$ (**hasta 1 punto**).

a) $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -3x+2y-5z=2 \\ x+2y-az=-1 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -a \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -a & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -a \end{vmatrix} = -2a-10-6-(2+6a-10) = -2a-16-6a+8 =$$

$$-8a-8=0 \Rightarrow a=-1$$

$a \neq -1 \quad rangoA = rangoA^* = 3 = nº\ incógnitas$ →SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

a=-1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2+6=8 \neq 0 \quad rangoA=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+4-(4+6) = -8 \neq 0 \ \ rangoA^*=3$$

$rangoA \neq rangoA^*$ *SISTEMA INCOMPATIBLE*

b) $a=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+3F_1]{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{cases} z=-1 \\ 8y-2(-1)=2 \Rightarrow y=0 \\ x+2\cdot 0-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

P2. (Números y álgebra)

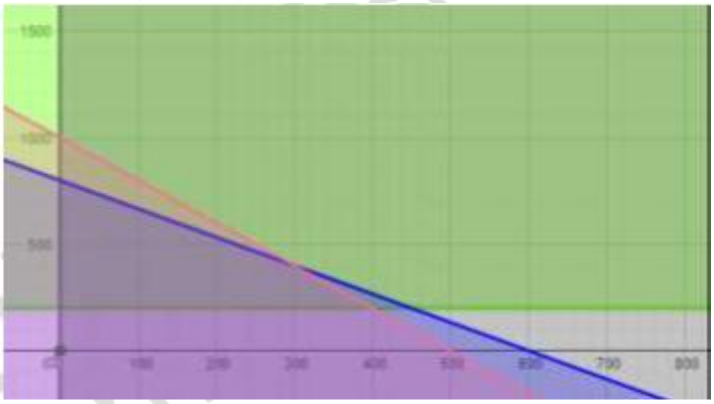
Una empresa utiliza 4 horas de trabajo de electrónica y 2 horas de trabajo de montaje por cada televisor LED que fabrica, y 3 horas de trabajo de electrónica y 1 hora de trabajo de montaje por cada televisor QLED. La empresa dispone de un máximo de 2400 horas de trabajo de electrónica y un máximo de 1000 horas de trabajo de montaje. Para satisfacer la demanda, la empresa debe fabricar al menos 200 televisores QLED. El beneficio obtenido en cada televisor LED es de 70 € y en cada televisor QLED es de 50 €.

Utilizar técnicas de programación lineal para determinar el número de televisores de cada tipo que la empresa debe fabricar para que el beneficio sea máximo, así como ese beneficio máximo.

	H. electrónica	H. trabajo	
LED	4	2	70€
QLED	3	1	50€
	2400	1000	

$$\begin{gathered} 4x + 3y \le 2400 \\ 2x + y \le 1000 \\ y \ge 200 \\ x \ge 0 \end{gathered}$$

Representamos las restricciones y obtenemos los siguientes vértices:
A(0, 200), B(400, 200), C(300, 400) y D(0, 800)



$B = 70x + 50y$

$$\begin{gathered} B(0{,}200) = 10000 \\ B(400{,}200) = 38000 \\ B(300{,}400) = 41000 \\ B(0{,}800) = 40000 \end{gathered}$$

300 *televisores LED y* 400 *televisores QLED obteniendo un beneficio de* $41000€$

P3. (Análisis)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & x \le 3 \\ 3x - 2m & x > 3 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de m para que la función sea continua en todos los números reales.

b) Para $m = -1$, calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo [5, 7].

a) Para que la función sea continua debe serlo en x=3.

$$\lim_{x \to 3^+} 3x - 2m = 9 - 2m$$

$$\lim_{x \to 3^-} x^2 - 3x + 2 = 9 - 9 + 2 = 2$$

$$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2$$

$$9 - 2m = 2 \Rightarrow \frac{7}{2}$$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & x \le 3 \\ 3x - 2m & x > 3 \end{cases}$

$$\int_5^7 3x + 2\,dx = \frac{3x^2}{2} + 2x \Big]_5^7 = 40u^2$$

P4. (Análisis)

La temperatura adecuada para el desarrollo vegetativo en el cultivo de tomates no debe exceder los 23 grados Celsius (ºC) y en ningún caso debe bajar de 7 ºC. La siguiente función expresa la temperatura, en grados Celsius, el día 14 de agosto en una zona de cultivo:

$$T(x) = \frac{-1}{14}x^2 + 2x + 10$$

donde $x \in [0, 24]$ es la hora del día.

a) Determinar a qué hora de ese día se alcanza la temperatura máxima y si ésta supera los 23 ºC.

b) ¿La zona de cultivo tuvo una temperatura inferior a los 7 ºC el 14 de agosto?

a) $T'(x) = \frac{-2x}{14} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{2x}{14} = 2 \Rightarrow x = 14\ horas$

$$T(14) = \frac{-1}{14} \cdot 14^2 + 2 \cdot 14 + 10 = 24℃$$

A las 14 horas se alcanza 24℃ por tanto supera 23℃.

b) Calculamos los valores de la temperatura en los extremos del día.

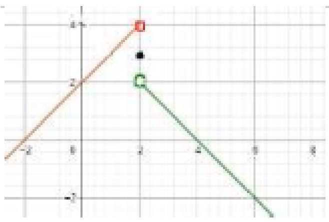
$$T(0) = 10℃$$
$$T(24) = 16{,}8℃$$

En ningún momento alcanza los 7º C porque de 10º C va aumentando la temperatura hasta el valor máximo de 24º C y luego desciende.

C1. (Números y álgebra)

¿Es posible que una matriz 4×2 coincida con su inversa? ¿Y con su traspuesta?

No se puede calcular la inversa de una matriz que no sea cuadrada y la matriz 4x2 no lo es.
No puede coincidir con su traspuesta porque ahora tendría otra dimensión 2x4.



C2. (Análisis)

Representar gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 4-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Septiembre 2020

P1. (Números y álgebra)

La asociación "*Stop Stress*" tiene 60 personas asociadas que practican solo una de las siguientes actividades: correr, yoga o natación. Se sabe que hay 18 personas menos en la actividad de correr que la suma de personas que practican yoga y natación. Además, la séptima parte de las personas que corren es igual a la quinta parte de las que practican yoga. Calcular el número de personas que realiza cada una de las actividades.

$$x = correr$$
$$y = yoga$$
$$z = natación$$

Hacerlo con la matríz ampliada por Gauss

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ x=y+z-18 \\ \frac{x}{7}=\frac{y}{5} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ x-y-z=-18 \\ 5x-7y=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[F_3-5F_1]{F_2-F_1} \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 0-2y-2z=-78 \\ 0-12y-5z=-300 \end{array}\right\} \xrightarrow{F_3-6F_2}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 0-2y-2z=-78 \\ 0-0-7z=168 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=24 \\ y=15 \\ x=21 \end{array}$$

P2. (Números y álgebra)

Un supermercado tiene almacenados 100 botes de alubias y 150 botes de garbanzos. Para su venta organiza dichos productos en dos lotes, A y B. La venta de un lote A, que contiene 1 bote de alubias y 3 botes de garbanzos, produce un beneficio de 3 €. La venta de un lote B, que contiene 2 botes de alubias y uno de garbanzos, produce un beneficio de 2 €. Además, desea vender al menos 10 lotes tipo A y al menos 15 lotes del tipo B.

Utilizando técnicas de programación lineal, calcular cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar el beneficio. ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

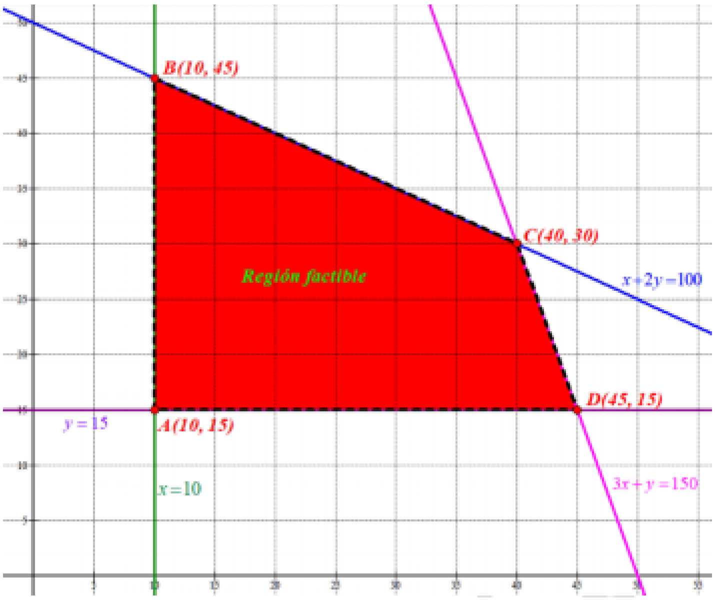
	Alubias	Garbanzos	
A	1	3	3€
B	2	1	2€
	100	150	

X= lotes de A
Y= lotes de B

Beneficio= 3x + 2y

$$\begin{gathered} x + 2y \leq 100 \\ 3x + y \leq 150 \\ y \geq 15 \\ x \geq 10 \end{gathered}$$

Representamos las restricciones y obtenemos los siguientes vértices:



$$\begin{gathered} B(x,y) = 3x + 2y \\ B(10,15) = 60 \\ B(10,45) = 120 \\ B(40,30) = 180 \\ B(45,15) = 165 \end{gathered}$$

40 *lotes de A y* 30 *lotes de B obteniendo un beneficio de* $180€$

P3. (Análisis)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 8 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x + m & \text{si } \quad x > 2 \end{cases}$

a) Determinar el valor de m para que $f(x)$ sea continua.

b) Calcular el área delimitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo [0, 1].

a) Para que la función sea continua:

$$\begin{gathered} \lim_{x \to 2^+} x + m = 2 + m \\ \lim_{x \to 2^-} -x^2 + 8x = -4 + 8 = 4 \\ f(2) = -2^2 + 8 = 4 \\ 2 + m = 4 \Rightarrow m = 2 \end{gathered}$$

b)

$$\int_0^1 -x^2 + 8\,dx = \left.\frac{-x^3}{3} + 8\right]_0^1 = \frac{23}{3}u^2$$

P4. (Análisis)

La cotización en euros de la criptomoneda *Bitcoin* en un determinado día del pasado año siguió la función $f(t) = 20t^2 - 200t + 1000$ donde t es el tiempo medido en horas desde el comienzo del día.

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(t)$.

b) ¿Cuánto se paga por la compra de 10 Bitcoins en el momento de mínima cotización de ese día?

a) $f(t) = 20t^2 - 200t + 1000 \Rightarrow f'(t) = 40t - 200 = 0 \Rightarrow 40t = 200 \Rightarrow$
$t = 5\ horas$

Signo f'(t)

	5	
	-	+
	$\searrow$	$\nearrow$

Crece (0, 5)
Decrece (5, 24)

b) $f(5) = 500€ \Rightarrow 10\ Bitcoins, 5000€$

C1. (Números y álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular $AB + C$.

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \end{pmatrix}, A \cdot B + C = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix}$

C2. (Análisis)

Calcula el valor de a para que la función $f(x) = ax^2 - 5ax + 4$ corte al eje OX en el punto de abscisa $x = 4$.

$Corte\ eje\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 4$
$0 = 16a - 20a + 4 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$