EBAU 2020 Matematicas II (septiembre)

E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para λ=1. **(0,8 puntos)**

E1)

a)

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right. \xrightarrow[\text{ampliada}]{\text{matriz}} \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

A matriz de coeficientes

Hallamos $|A| = \lambda^2 + 1 - \lambda - 1 = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$

$|A| = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = +1 \end{cases}$

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ Rango(A) = Rang$(\bar{A})$ = nº incóg. por el T.R.F. es un sistema C.D. (Solución única)

$\boxed{\text{Si } \lambda = 0}$ $\qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \quad R(A) < 3$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow R(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow R(\bar{A}) = 3$

$R(A) \neq R(\bar{A})$ y por el T.R.F. S. I.

$\boxed{\text{Si } \lambda = 1}$ $\qquad |A| = 0 \Rightarrow R(A) < 3 \qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$F_2 = F_3 \Rightarrow R(A) = R(\bar{A}) = 2$ con por el T.R.F. S.C.I. infinitas soluciones.

b)

$$\left.\begin{array}{l} E_1: x + y = 1 \\ E_2: x + y + z = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow[x=\mu]{} \boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = 1 \end{array}\right. \quad \mu \in \mathbb{R}}$$

$E_2 - E_1 \quad z = 1$

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique:

$A^2 = A^t$ $\quad$ $(A^t \equiv la\ traspuesta\ de\ A)$. **(1,2 puntos)**

b) ¿ Para qué valores de m y n la matriz A no es invertible ? **(0,8 puntos)**

E2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$$

a) ¿m, n? tal que $A^2 = A^t$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m+mn & n^2 \end{pmatrix}$$

Si $n=0 \Rightarrow m=m$ para todo $m \in \mathbb{R}$

Si $n=1 \Rightarrow m=2m \Rightarrow m=0$

$$A^t = A^2 \iff \begin{cases} m = m + m \cdot n \\ n = n^2 \longrightarrow n^2 - n = 0 \Rightarrow n(n-1) = 0 \end{cases} \qquad n=0,\ n=1$$

Luego $A^t = A^2$ si $n=0$ y para todo $m \in \mathbb{R}$

y si $n=1$ y $m=0$.

b) A no es invertible para los valores de n y m que hagan cero el $|A| \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix} = n \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow n = 0$

Luego $\nexists A^{-1}$ para $n=0$ y $\forall m \in \mathbb{R}$.

E3.- (Geometría)

Dados el punto P (2,1,1) y la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$,

a) Hallar la recta paralela a r que pase por P. **(0,8 puntos)**

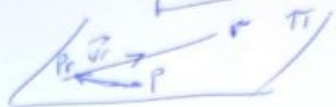
b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r. **(1,2 puntos)**

E.3 Sean $P(2,1,1)$ y $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$

a) ¿ $s \parallel r$ y $P \in s$? s y r tienen la misma dirección ⇒ $\vec{v_s} = \vec{v_r} = (1,-1,-3)$ ⇒ la recta s en paramétricas es

$$\boxed{s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}}$$

b) ¿ π tal que $r \subset \pi$ y $P \in \pi$?



Luego π está determinado por el pto P y los vectores $\vec{v_r} = (1,-1,-3)$ y $\overrightarrow{PP_r} = (0,2,3)$

Luego $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z-1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 3x - 3y + 2z - 5 = 0}$

E4.- (Geometría)

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2,3)$ y es paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$. **(1 punto)**

b) Calcular el punto simétrico del $(1,2,3)$ respecto del plano $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$. **(1 punto)**

E.4

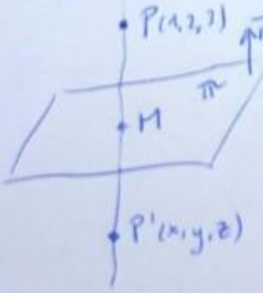
a) ¿ $s \parallel r$ y $P(1,2,3) \in s$? siendo $r \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$

$$\vec{v_r} = (1,-1,-1) \times (1,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{j} + 2\vec{k} = (0,-2,2)$$

y podemos tomar como $\vec{v_r} = (0,-1,1)$ (proporcional al calculado)

Luego $\boxed{s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - \mu \\ z = 3 + \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}}$

b) ¿ P' simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$?



Hallamos la proyección de P sobre π que será el punto medio de PP':

Proyec.: $M = t \cap \pi$ siendo $t \perp \pi$ y $P \in t$

Luego $t \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

y M: $3(1+3\lambda) + 2(2+2\lambda) + 3 + 3\lambda + 4 = 0$

$14\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

Luego $M = (-2, 0, 2)$ y $P'(-5,-2,1)$

ya que $\frac{x+1}{2} = -2 \Rightarrow x = -5$; $\frac{y+2}{2} = 0 \Rightarrow y = -2$

y $\frac{z+3}{2} = 2 \Rightarrow z = 1$.

E5.- (Análisis)

Determinar la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto $(-1, 0)$ es el eje de abscisas. **(2 puntos)**

E.5 ¿ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$?

$f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x=1 \Rightarrow f''(1) = 0$

la recta tangente a $f(x)$ en el $(-1,0)$ es el eje OX $\Rightarrow$ $f(-1) = 0$
(y=0) $f'(-1) = 0$
(pendiente 0)

Por lo tanto tenemos que resolver el sistema: $\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f'(-1) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{cases}$

Siendo $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ y $f''(x) = 6x + 2a$

Entonces $\begin{cases} -1 + a - b + c = 0 \longrightarrow \boxed{c = -5} \\ 3 - 2a + b = 0 \longrightarrow \boxed{b = -9} \\ 6 + 2a = 0 \longrightarrow \boxed{a = -3} \end{cases}$

y $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5}$

E6.- (Análisis)

Demostrar que la ecuación $x^4 + 3x = 1 + sen\, x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0,\ 2]$. Probar que la solución es única. **(2 puntos)**

E.6 Consideramos la función $f(x) = x^4 + 3x - 1 - \operatorname{sen}(x)$ que es una función continua en $[0,2]$ y $\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(2) > 0 \end{array}\right\}$ en virtud del Teorema de Bolzano existe al menos un $c \in (0,2)$ tal que $f(c) = 0$, luego existe al menos una solución de la ecuación dada en $[0,2]$.

Veamos que es la única, por reducción al absurdo:

Supongamos que existe otra solución $c_2 \in (0,2)$, como f es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$ y $f(c) = f(c_2) = 0$ en virtud del Teorema de Rolle existe al menos un $\alpha \in (0,2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

Pero $f'(\alpha) = 4\alpha^3 + 3 - \cos\alpha > 0 \quad \forall\, \alpha \in (0,2)$ y no se anula para ningún $\alpha \in (0,2)$, llegando a una contradicción.

Por lo tanto la raíz c es la única que existe.

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}$. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x)=\frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}$, hallar la función primitiva suya $F(x)$ que verifique $F(0)=3$.

(1 punto)

E.7

a) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{-1} =$$

L'Hôpital

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1/2 - 1}{-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) $$F(x) = \int \frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}\,dx = \ln(x^2+e^{-x}) + C$$

Como $F(0)=3 \Rightarrow \ln(e^{-3}) + C = 3 \Rightarrow -3 + C = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 6$ y la primitiva buscada es $\boxed{F(x) = \ln(x^2+e^{-x}) + 6}$

E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x)=x^2-2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1,3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=3$. **(1 punto)**

E.8

a) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ su dominio es $\text{Dom} f=(0,+\infty)$

Buscamos los puntos críticos: $f'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 1-\ln(x)=0 \Rightarrow 1=\ln(x) \Rightarrow e^1=e^{\ln x} \Rightarrow \boxed{x=e}$

Estudiamos el signo de $f'(x)$

$0 \quad f'(2)>0 \nearrow \quad e \quad f'(3)<0 \searrow$

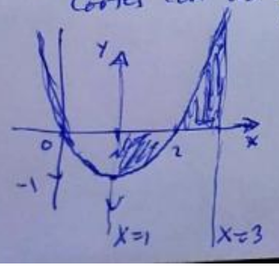
Por lo tanto $f(x)$ alcanza un máximo relativo $\left(e,\frac{1}{e}\right)$ y crece en $(0,e)$ y decrece en $(e,+\infty)$.

b) $f(x)$ es una parábola, la representamos y estudiamos el signo:

$f(x)=x^2-2x$, $a=1>0$ $\cup$ y su vértice es $x_v=\frac{-b}{2a}$; $x_v=1$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ $\quad V(1,-1)$ $\quad y_v=1^2-2=-1$

Cortes con los ejes: OX : $x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0$ → $x=0$ $(0,0)$; $x=2$ $(2,0)$
OY : $x=0$ $y=0$ $(0,0)$



Luego $f(x)<0$ en $[1,2)$ y $f(x)>0$ en $(2,3]$

y por lo tanto el área pedida es:

$$A=-\int_1^2(x^2-2x)\,dx+\int_2^3(x^2-2x)\,dx=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3=$$

$$=-\left(\frac{8}{3}-4-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right)+\left(\frac{27}{3}-9-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right)=\boxed{4u^2}$$

E9.- (Probabilidad y estadística)

El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en Kg (kilogramos) por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 y desviación típica 5.

a) ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 Kg de azúcar al año? **(1 punto)**

b) ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 Kg? **(1 punto)**

E.9

X = Consumo de azucar de un país (Kg) $X \sim N(15, 5)$

a) $P(X < 10) \underset{\text{Tipificamos}}{=} P\left(Z < \frac{10-15}{5}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z \leq 1) =$

$= 1 - 0,8413 = 0,1587$

Tabla normal $N(0,1)$

Por lo tanto el 15,87 % de las personas del país consumen menos de 10 kg de azucar al año.

b) $P(X > 25) \underset{\text{Tipificamos}}{=} P\left(Z > \frac{25-15}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) =$

$= 1 - 0,9772 = 0,0228$

$N(0,1)$

Por lo tanto el 2,28% de los habitantes del país consumen más de 25 kg al año.

E10.- (Probabilidad y estadística)

Los estudiantes, que comienzan los estudios de Medicina, en el conjunto formado por las comunidades autónomas de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50% de Andalucía, un 15% de Baleares y un 35% provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15% de Andalucía, 10% de Baleares y 5% de Castilla y León

a) Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina. **(1 punto)**

b) Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León? **(1 punto)**

E.10 Definimos los siguientes sucesos y sus probabilidades:

A = Estudiantes de Andalucía $\quad P(A) = 0{,}5$

B = " " Baleares $\quad P(B) = 0{,}15$

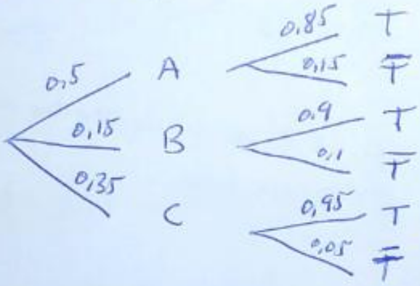
C = " " Castilla y León $\quad P(C) = 0{,}35$

T = Titulan en Medicina

$\overline{T}$ = No titulan

$$P(A/\overline{T}) = 0{,}15 \quad P(B/\overline{T}) = 0{,}1 \quad P(C/\overline{T}) = 0{,}05$$

Dibujamos el diagrama de árbol asociado:



a) Por el teorema de la probabilidad total, tenemos:

$$P(\overline{T}) = P(A\cap\overline{T}) + P(B\cap\overline{T}) + P(C\cap\overline{T}) =$$

$$= 0{,}5\cdot 0{,}15 + 0{,}15\cdot 0{,}1 + 0{,}35\cdot 0{,}05 = \boxed{0{,}1075}$$

(regla del producto)

El 10,75 % de los estudiantes no titulan.

b) Calculemos las probabilidades $P(A/\overline{T})$ y $P(C/\overline{T})$ por el teorema de Bayes y las comparamos:

$$P(A/\overline{T}) = \frac{P(A\cap\overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}15}{0{,}1075} = 0{,}6976$$

V

$$P(C/\overline{T}) = \frac{P(C\cap\overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}35\cdot 0{,}05}{0{,}1075} = 0{,}1627$$

Por lo tanto es más probable que provenga de Andalucía.