EBAU 2020-Matematicas II (Julio)

E1.- (Álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro real a. **(1,2 puntos)**

b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a = -1$. **(0,8 puntos)**

a) $\begin{cases} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix}$ Sistema homogéneo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = 2 + a^2 - (-a + 2) = 2 + a^2 + a - 2 = a(a+1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

– $\boldsymbol{a \neq 0 \text{ y } a \neq -1}$ $\quad rangoA = rangoA^* = 3 = n^{\underline{o}}\ incógnitas \rightarrow$ Por el Teorema de Rouché-F. $SISTEMA\ COMPATIBLE\ DETERMINADO$ con la única solución la trivial x=y=z=0

– $\boldsymbol{a = 0}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por el Teorema de Rouché-Frobenius

$RA = RA^* = 2 < n^{\underline{o}}\ incógnitas \rightarrow\ SISTEMA\ COMPATIBLE\ INDETERMINADO$

– a=-1 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$RA = RA^* = 2 < n^{\underline{o}}\ incógnitas \rightarrow SISTEMA\ COMPATIBLE\ INDETERMINADO$

b) a=-1

$n^{\underline{o}}\ indeterminaciones = n^{\underline{o}}\ de\ incógnitas - rango = 3 - 2 = 1\ indeterminación$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} y = 0 \\ z = \lambda \\ x = +\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \longrightarrow x = \lambda \quad z = \lambda$$

Restamos $\quad -y = 0 \rightarrow y = 0$

$$\text{Sol} \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$.

a) Indique para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}. **(0,5 puntos)**

b) Si $a = 4$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

encuentre la matriz X que verifica que $B + XA = C$. **(1,5 puntos)**

a) Una matriz tendrá inversa si su determinante es distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{vmatrix} = (a+1)(a-3) - (a-3) = a^2 - 3a = 0 \Rightarrow a(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases}$$

Existe A^{-1} para los valores $a \neq 0 \; y \; a \neq 3$

b) $B + XA = C \Rightarrow XA = C - B \Rightarrow XAA^{-1} = (C-B)A^{-1} \Rightarrow X = (C-B)A^{-1}$

Calculamos A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 - F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[4F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & 5/4 \end{array}\right)$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (C-B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/4 & 6/4 \\ -2/4 & 6/4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

E3.- (Geometría)

Sea el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ y el punto A=(1, 3, -1).

Hallar la ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

(2 puntos)

Primero pondremos r en paramétricas para conocer su vector director.

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad por\ tanto\ \overrightarrow{v_r} = (1,1,0) \quad \text{El plano que nos están pidiendo } \alpha \begin{cases} pasa\ por\ A \\ \parallel r \\ \perp \pi \end{cases}$$

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(y-3) + (z+1) - \left(-2(z+1) + 2(x-1)\right)$$

$$= -2x + 2y + 3z - 1 = 0$$

E4.- (Geometría)

Dados el punto A(1,2,4) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$,

a) Hallar un punto B de la recta r de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano $\pi \equiv\ x + 2z = 0$. **(1,5 puntos)**

b) Hallar un vector (a, b, c) perpendicular a $(1,0,-1)$ y $(2,1,0)$. **(0,5 puntos)**

a)

$$B \in r \quad , \overrightarrow{n_\pi} = (1,0,2), \quad \overrightarrow{AB} \parallel \pi \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2\lambda \\ y &= 1 + \lambda \\ z &= 1 + 2\lambda \end{aligned} \qquad \overrightarrow{AB} = (1 + 2\lambda - 1, 1 + \lambda - 2, 1 + 2\lambda - 4) = (2\lambda, \lambda - 1, 2\lambda - 3)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = (2\lambda, \lambda - 1, 2\lambda - 3) \cdot (1,0,2) = 0$$
$$2\lambda + 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$B(1 + 2\lambda, 1 + \lambda, 1 + 2\lambda) = (3,2,3)$$

b) r perpendicular a otro dos dados, haremos el producto vectorial.

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{j} + \vec{k} - (-\vec{\imath}) = \vec{\imath} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{u} = (1, -2, 1)$$

E5.- (Análisis)

Representar gráficamente la función $f(x) = xe^x$, calculando previamente sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas.

(2 puntos)

$f(x) = xe^x,$

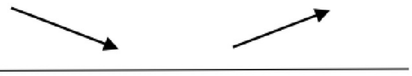
- $Dom = \mathbb{R}$
- *No hay asíntotas verticales porque el domiio es toda la recta real*

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to+\infty} xe^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

No ha asíntotas oblicuas porque hay asíntotas horizontales

- *Máximos y mínimos*:

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) = 0 \Rightarrow e^x \neq 0, \qquad (1+x) = 0 \Rightarrow x = -1$$



Signo f'(x) - -1 +

En x=-1 tenemos un mínimo.

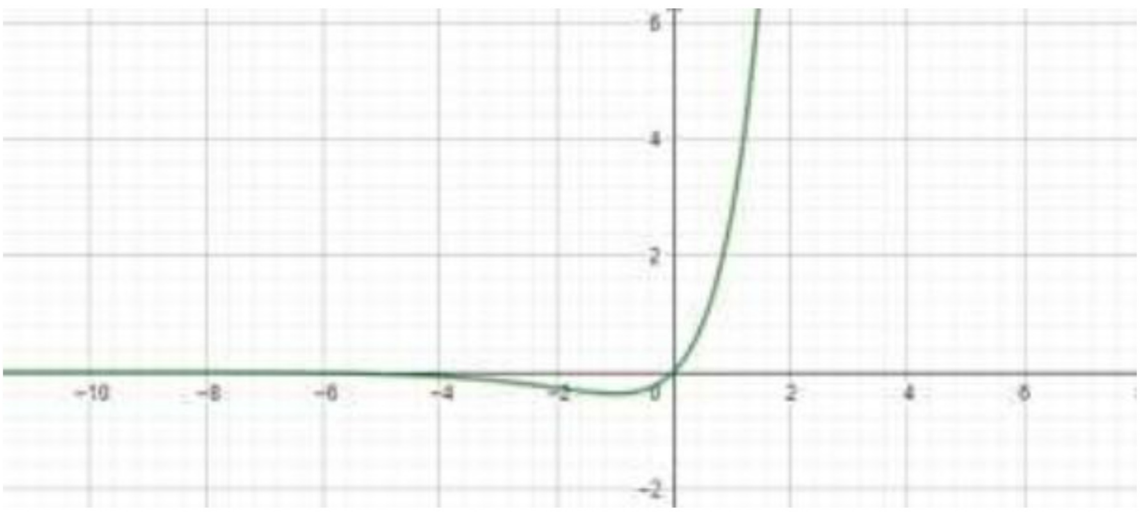
$f(-1) = -e^{-1} = -0{,}36$

- Concavidad y convexidad.

$f''(x) = e^x(1+x) + e^x = e^x(1+x+1) = e^x(2+x) = 0 \Rightarrow e^x \neq 0;\ \ 2+x = 0 \Rightarrow$
$x = -2$

-2

Signo f''(x) - +



E6.- (Análisis)

Demuestre que la ecuación $x^3 - 12x = -2$ tiene una solución en el intervalo $[-2,2]$ y pruebe además que esa solución es única. **(2 puntos)**

La función f es continua en el intervalo marcado por ser un polinomio.
Para demostrar que tiene una solución aplicaremos el Teorema de Bolzano.

$$f(-2) = -8 + 24 + 2 = 18$$
$$f(2) = 8 - 24 + 2 = -14$$
$$Como\ signof(-2) \neq signof(2) \Rightarrow existe\ c\ tal\ que\ f(c) = 0$$

Para comprobar que esa solución es única aplicamos el Teorema de Rolle.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

No hay ningún punto donde se anule la derivada dentro del intervalo (-2,2) por tanto demostramos que la solución es única.

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + sen\, x - 1}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\, x + \cos x) dx$ **(1 punto)**

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - cosx - x}{e^x + senx - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) =_{L'H} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + senx - 1}{e^x + cosx} = \frac{0}{2} = 0$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (senx + cosx)dx = -cosx + senx\Big]_0^{\pi/2} = -cos\frac{\pi}{2} + sen\frac{\pi}{2} - (-cos0 + sen0) = 2$$

E8.- (Análisis)

a) Calcule los puntos de corte de las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$. **(0,5 puntos)**

b) Sabiendo que en el intervalo $[1,2]$ se verifica que $g(x) \geq f(x)$ calcular el área del recinto limitado por la gráfica de ambas funciones en dicho intervalo. **(1,5 puntos)**

a)

$$\frac{2}{x} = 3 - x \Rightarrow 2 = 3x - x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

b)

$$\int_1^2 3 - x - \frac{x}{2} dx = 3x - \frac{x^2}{2} - 2lnx\Big]_1^2 = 6 - 2 - 2ln2 - \left(3 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - 2ln2\ u^2$$

E9.- (Probabilidad y estadística)

El peso de los alumnos de 2º de bachillerato de un instituto de León, sigue una distribución normal, de media 75 kg y de desviación típica 5. Si se elige al azar un alumno, calcular la probabilidad de que:

a) Tenga un peso entre 70 y 80 kg. **(1 punto)**

b) Tenga un peso superior a 85 kg. **(1 punto)**

a) $p(70 \leq x \leq 80) = p\left(\frac{70-75}{5} \leq z \leq \frac{80-75}{5}\right) = p(-1 \leq z \leq 1) = p(z \leq 1) - p(z \leq -1) = p(z \leq 1) - [1 - p(z \leq 1)] = 0{,}8413 - 1 + 0{,}8413 = 0{,}6826$

b)

$$p(x > 85) = p\left(z \geq \frac{85-75}{5}\right) = p(z \geq 2) = 1 - p(z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

E10.- (Probabilidad y estadística)

La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0,6, 0,3 y 0,1, respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es 0,25 para los barcos de bajo tonelaje, 0,4 para los de tonelaje medio y 0,6 para los de tonelaje alto.

a) Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento. **(1 punto)**

b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio. **(1 punto)**

a) $p(mantenimiento) = p(Bajo \cap M) + p(Medio \cap M) + p(Alto \cap M) = 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}33$

b) $p\left({}^{Medio}/_{M}\right) = \frac{p(Medio \cap M)}{p(M)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}33} = 0{,}36$