PRODUCTO VECTORIAL Y MIXTO

1. En R^3 consideramos los vectores $\vec{u} = (2, 1, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 3)$ y $\vec{w} = (3, 0, 2)$. Halla:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$ **b)** $\vec{v} \times \vec{u}$ **c)** $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ **d)** $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

Las soluciones son:

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (2, -7, -3)$

b) $\vec{v} \times \vec{u} = (-2, 7, 3)$

c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (-14, -13, 21)$

d) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (10, -4, 16)$

2. Los vectores $\vec{u} = (2, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 2)$ y $\vec{w} = (0, 2, 1)$ ¿forman base de R^3? ¿Y los vectores $\{\vec{u} \times \vec{v},\ \vec{v} \times \vec{w},\ \vec{w} \times \vec{u}\}$?

Los vectores dados son linealmente independientes puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

Hallamos los otros vectores y obtenemos $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, -3, 2)$; $\vec{v} \times \vec{w} = (-3, -1, 2)$ y $\vec{w} \times \vec{u} = (2, 2, -4)$.

Estos vectores son linealmente independientes puesto que $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$

3. Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores de R^3 tales que $|\vec{v}| = 3$, $|\vec{w}| = 4$ y $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$. Halla $|\vec{v} \times \vec{w}|$.

$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot sen\ \alpha$ siendo α el ángulo que forman estos vectores.

Como $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha$, entonces deducimos que cos α = 1/2 y que sen α = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ por lo que:

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot sen\ \alpha = 6\sqrt{3}$$

4. Tres vértices de un paralelogramo ABCD son los puntos de coordenadas A (1, 0, 1), B (- 1, 1, 1) y C (2, -1, 2). Halla las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo.

En un paralelogramo ABCD se verifica que el punto medio de la diagonal AC es el mismo que el de la diagonal BD. De esta forma obtenemos que las coordenadas del punto D son (4, - 2, 2).

El área del paralelogramo es: $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |(1,2,1)| = \sqrt{6}\ uc.$

5. El plano de ecuación 2x – 3y + z + 6 = 0 corta a los ejes coordenados en tres puntos que son los vértices de un triángulo. Halla su área.

Los vértices del triángulo son A (- 3, 0, 0), B (0, 2, 0) y C (0, 0, - 6).

El área del triángulo es $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |(-12, 18, -6)| = \frac{1}{2}\sqrt{504} = 11{,}22\ uc.$

6. Halla un vector director de la recta que siendo paralela a los planos 2x – 3y + z – 5 = 0, x + 2y – 3z + 4 = 0 pase por el punto P (1, 2, 3). Escribe, como intersección de dos planos, la ecuación de esta recta.

Un vector de la recta viene dado por $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (7,\ 7,\ 7)$. La ecuación, como intersección de dos planos, de esta recta es:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

7. Halla la distancia del punto M (1, 4, -1) a cada una de las siguientes rectas:

a) $r \equiv \begin{cases} x - y - z + 3 = 0 \\ 3x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ **b)** $s \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = -z$

a) Tomamos un punto P (0, 2, 1) de la recta y uno de sus vectores $\vec{v} = (1,\ -4,\ 5)$. La distancia del punto M a la recta r viene dada por:

$$\text{d (M, r)} = \frac{\left|\overrightarrow{PM} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{42}} = 1{,}46\ ul.$$

b) Tomamos un punto Q (2, - 1, 0) de la recta y uno de sus vectores $\vec{v} = (3,\ -2,\ -1)$. La distancia del punto M a la recta s viene dada por:

$$\text{d (M, s)} = \frac{\left|\overrightarrow{QM} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{3\sqrt{26}}{\sqrt{14}} = 4{,}09\ ul.$$

8. Halla la distancia entre las rectas de ecuaciones: $r \equiv \begin{cases} x - z = -2 \\ y - z = -4 \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Estas rectas son paralelas.

Para hallar la distancia de r a s tomamos un punto P (- 2, - 4, 0), por ejemplo, de la recta r y hallamos la distancia a la recta s. Para ello tomamos un punto A (0, 0, 0) de la recta s y uno de sus vectores $\vec{v} = (1,\ 1,\ 1)$. La distancia del punto P a la recta s viene dada por:

$$\text{d (r, s) = d (P, s)} = \frac{\left|\overrightarrow{PA} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = 2\sqrt{2}\ ul.$$

9. Sean los vectores de R³ $\vec{u} = (1, 3, -2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ **y** $\vec{w} = (-1, 2, 0)$. **Halla:**

a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ **b)** $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ **c)** $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ **d)** $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Las soluciones son:

a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ = 6 · (- 1, 2, 0) = (- 6, 12, 0).

b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ = (7, - 5, - 4) · (- 1, 2, 0) = - 17.

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ = (1, 3, - 2) · (- 2, - 1, 6) = - 17.

d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ = (7, - 5, - 4) · (- 2, - 1, 6) = - 33.

10. Halla la ecuación de la recta paralela al plano de ecuación x – y – 2z + 12 = 0 y que sea perpendicular a la recta r en el punto en el que esta se corta con el plano OYZ siendo:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ x + 4z = -4 \end{cases}.$$

El vector de la recta pedida lo hallamos por el producto vectorial del vector característico del plano y un vector de la recta dada, es decir:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -7 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (15, -7, 11).$$

El punto de intersección por el que pasa es P (0, 2, -1).

La ecuación de la recta es $s \equiv \dfrac{x}{15} = \dfrac{y-2}{-7} = \dfrac{z+1}{11}$.

11. El plano mediatriz del segmento de extremos A (3, 1, 5) y B (- 1, 7, 3) corta a los ejes coordenados determinando con el origen de coordenadas un tetraedro. Halla su volumen.

El plano mediatriz del segmento tiene por ecuación 2x – 3y + z + 6 = 0

Corta a los ejes coordenados en los puntos A (- 3, 0, 0); B (0, 2, 0) y C (0, 0, - 6).

El volumen del tetraedro es: $\dfrac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 6$ unidades cúbicas.

12. Halla el área del cuadrado que tiene dos de sus lados sobre las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 2y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}.$$

Estas rectas son paralelas. El lado del cuadrado será la distancia entre ellas.

Para hallar la distancia de r a s tomamos un punto P (2, - 1, 0), por ejemplo, de la recta r y hallamos la distancia a la recta s. Para ello tomamos un punto A (0, 1, 2) de la recta s y uno de sus vectores $\vec{v} = (1, -2, -2)$. La distancia del punto P a la recta s viene dada por:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{\left|\overrightarrow{PA} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\sqrt{50}}{3}.$$

El área del cuadrado es 50/9 u.c.

13. a) Estudia, según los valores de a, la posición relativa de las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv x-1 = 2-y = z \text{ y } s \equiv \begin{cases} x = a+2t \\ y = 2+t \\ z = 2a+t \end{cases}$$

b) Para a = 3 halla la distancia entre ellas.

13. a) Tomamos tres vectores, uno de cada una de ellas y el otro el que va de un punto de una a otro punto de la otra y estudiamos su posición:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 2a \end{vmatrix} = 4a + 2.$$

Si a $\neq \frac{1}{2}$ entonces las rectas se cruzan y si a = $\frac{1}{2}$ las rectas son secantes.

b) Para a = 3 las rectas se cruzan. Hallamos la distancia entre ellas aplicando la fórmula de la distancia entre rectas que se cruzan:

$$\text{d (r, s)} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \text{ unidades.}$$

14. Halla la ecuación de la perpendicular común a las rectas $r \equiv \frac{x+1}{3} = y-2 = z$ **y** $s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -2t \end{cases}$ **.**

Hallamos el plano que contiene a r y a un vector perpendicular común a r y s, y el plano que contiene a s y al mismo vector anterior. Ambas ecuaciones son la recta pedida.

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 19y - 25z - 36 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -2 \\ -4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x + y + 5z = 0.$$

Por lo que la recta pedida tiene por ecuación $\begin{cases} 2x + 19y - 25z - 36 = 0 \\ 8x + y + 5z = 0 \end{cases}$.

15. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A (3, 0, 0), es paralela al plano 3x – y + z = 2 y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$**.**

El vector de la recta pedida lo hallamos por el producto vectorial de un vector normal del plano y un vector de la recta dada, es decir:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -9, 0).$$

La ecuación de la recta es $s \equiv \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -9t \\ z = 0 \end{cases}$.

16. Halla un punto de la recta de ecuación $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$ **que forme con los puntos B (1, 1, 1) y C (12, -1, 1) un triángulo de área 50 unidades cuadradas.**

Un punto cualquiera de la recta tiene la forma P (1 + 3t, 1 + 4t, 1). El área del triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BP}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{50^2 \cdot t^2}.$$

Como el área es 50 obtenemos que t = + 2 y t = - 2. Por tanto hay dos puntos que verifiquen el enunciado y son P (7, 9, 1) y Q (- 5, - 7, 1).

17. Dadas las rectas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + a\,(y - 2) \\ x = z \end{cases} \quad \textbf{y} \quad s : \begin{cases} \quad y - z + 1 = 0 \\ ax \quad - z = 2a - 2 \end{cases}$$

a) Averigua su posición relativa según los valores de a.

b) Tomando a = 0, determina los puntos P $\in$ r y Q $\in$ s tales que la distancia entre P y Q sea mínima.

a) Para el estudio de la posición relativa de las rectas r y s consideramos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} r : \begin{cases} x - ay \quad = 1 - 2a \\ x \quad\quad - z = 0 \end{cases} \\ s : \begin{cases} \quad\quad y - z = -1 \\ ax \quad\quad - z = 2a - 2 \end{cases} \end{cases}$$

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1 - 2a \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ a & 0 & -1 & 2a - 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz ampliada A* vale: det (A*) = $a^2 - 1$ = (a – 1) (a + 1). Este determinante se anula para a = 1 y a = - 1.

Estudio:

- Si a ≠ - 1 y a ≠ 1, el rango de A es 3 y el rango de A* es 4, las rectas se cruzan.
- Si a = - 1, el rango de A es 3 y el rango de A* es 3, las rectas se cortan en el punto (2, 1, 2).
- Si a = 1, el rango de A es 2 y el rango de A* es 3, las rectas son paralelas.

b) Para a = 0 las rectas se cortan y sus ecuaciones son:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \quad t \\ z = 1 \end{cases} \quad y \quad s . \begin{cases} y - z = -1 \\ \quad - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \quad s \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Sean P (1, t, 1) y Q (s, 1, 2) puntos cualesquiera de las rectas r y s, respectivamente.

Sea $\overrightarrow{PQ}\,(s - 1, 1 - t, 1)$ el vector que une los puntos P y Q. Este vector tiene que ser ortogonal a los vectores directores de las rectas r y s: $\overrightarrow{u_r} = (0, 1, 0)$ y $\overrightarrow{u_s} = (1, 0, 0)$.

Imponiendo la condición de ortogonalidad, obtenemos:

$$\begin{cases} (s - 1, 1 - t, 1) \cdot (0, 1, 0) = 0 \\ (s - 1, 1 - t, 1) \cdot (1, 0, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - t = 0 \\ s - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 1 \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son P_r (1, 1, 1) y Q_s (1, 1, 2). La distancia mínima es:

$$d\,(P_r, Q_s) = \sqrt{(1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 1)^2} = 1.$$

18. Halla la ecuación de la recta que se apoya en el eje OZ y la recta $s \equiv \begin{cases} x+y=5 \\ 3x+z=1 \end{cases}$ **y es perpendicular a ellas.**

Hallamos el plano que contiene a r y a un vector perpendicular común a r y s, y el plano que contiene a s y al mismo vector anterior. Ambas ecuaciones son la recta pedida.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x & y-5 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 3y + 2z + 13 = 0.$$

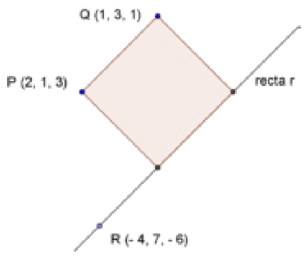
Por lo que la recta pedida tiene por ecuación $\begin{cases} x-y=0 \\ 3x-3y+2z+13=0 \end{cases}$.

19. Halla el volumen del paralelepípedo de bases ABCD y EFGH siendo A (6, 0, 0), B (6, 6, 0), C(0, 6, 0) y E (6, 6, 6).

El volumen es $\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right]\right| = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 216$ unidades cúbicas

20. Un cuadrado tiene dos vértices en los puntos P (2, 1, 3) y Q (1, 3, 1); los otros sobre una recta r que pasa por el punto R (- 4, 7, - 6).

a) Calcula la ecuación de la recta r.
b) Calcula la ecuación del plano que contiene al cuadrado.
c) Halla las coordenadas de uno de los dos vértices.



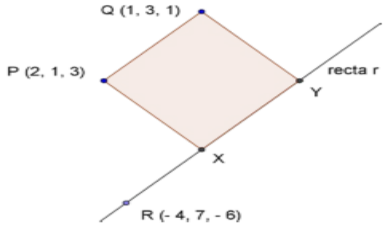
a) La recta r pasa por el punto R (- 4, 7, - 6) y tiene por vector director $\overrightarrow{PQ} = (-1, 2, -2)$. Su ecuación será:

$$\frac{x+4}{-1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+6}{-2}$$

b) El plano que contiene al cuadrado viene determinado por el punto R (- 4, 7, - 6) y los vectores $\overrightarrow{PR} = (-6, 6, -9)$ y $\overrightarrow{QR} = (-5, 4, -7)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+4 & -6 & -5 \\ y-6 & 6 & 4 \\ z+6 & -9 & -7 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 2z + 3 = 0.$$



c) Uno de los vértices, X, está en r y sus coordenadas pueden ser expresadas en la forma X = (- 4 – t, 7 + 2t, - 6 – 2t); además los vectores:

$$\overrightarrow{PX} = (-t-6, 2t+6, -2t-9) \text{ y } \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, -2)$$

deben ser perpendiculares, por tanto:

De la condición $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ obtenemos t = - 4 y para este valor el vértice buscado es el punto X (0, - 1, 2).

El otro punto Y = (- s – 4, 7 + 2s, - 6 - 2s) cumple $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ}$; es decir:

(- s – 4, 2s + 8, - 2s – 8) = (- 1, 2, - 2) $\Rightarrow$ s = - 3.

Para s = - 3 el último vértices es Y (- 1, 1, 0).