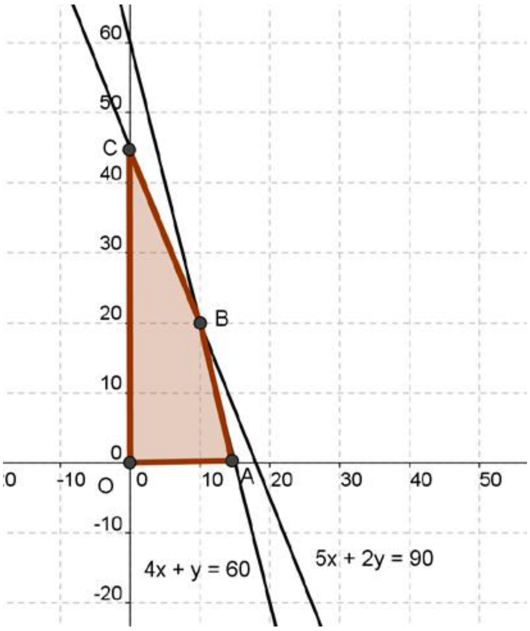
En la imagen adjunta aparecen las soluciones del sistema en el cuadrilátero de color azul, cuyos vértices son los puntos (0, 0); (15, 0); (10, 20) y (0, 45).

Si queremos conocer los valores óptimos del programa lineal debemos activar la opción **Copiar la solución en el portapapeles** del menú **Programación lineal** y llevándolo a un procesador de textos el programa nos proporciona los valores que podemos ver a continuación:

F(0, 0) = 0; S S S S
F(0, 45) = 27000; S S S S
F(0, 0) = 0; S S S S
F(15, 0) = 24000; S S S S
F(18, 0) = 28800; S S S N
F(0, 60) = 36000; S S N S

F(0, 0) = 0; S S S S
F(0, 60) = 36000; S S N S
F(18, 0) = 28800; S S S N
F(0, 45) = 27000; S S S S
F(10, 20) = 28000; S S S S
F(15, 0) = 24000; S S S S



Max(10, 20) = 28000

Mín(0, 0) = 0

El máximo beneficio, de 28 000 euros, se obtiene con el transporte de 10 camionetas y 20 furgones.

En la imagen adjunta puede verse otro dibujo de la región de soluciones y sus vértices.

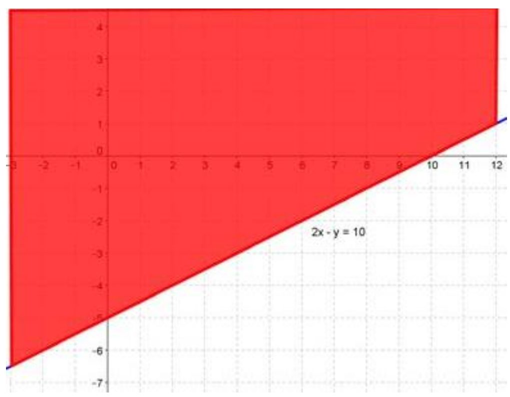
ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 108

1. Encuentra el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

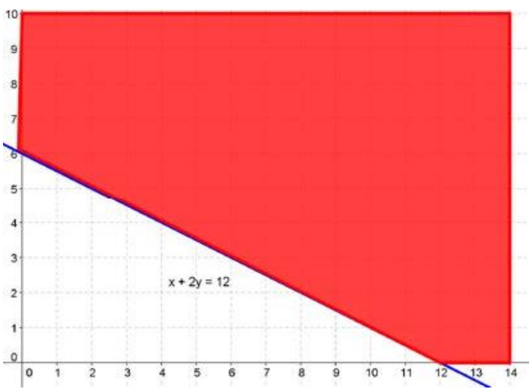
a) x – 2y ≤ 10 **b) x + 2y ≥ 12** **c) x ≤ 3** **d) y ≥ - 2**

Las soluciones pueden verse en los dibujos siguientes:

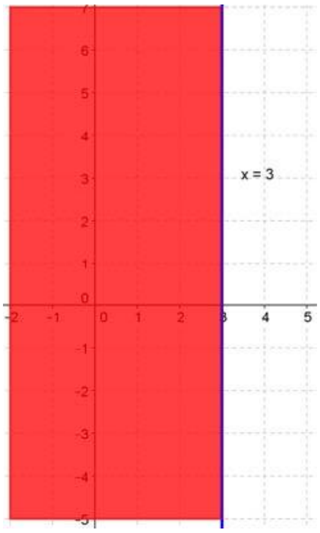
a)



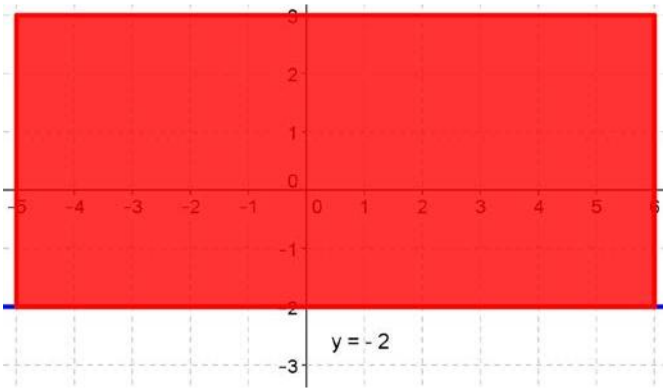
b)



c)



d)

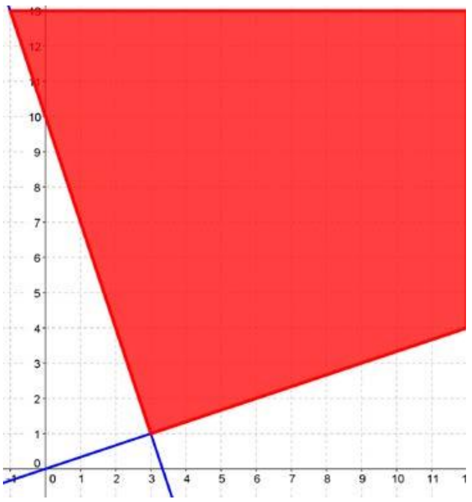


2. Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

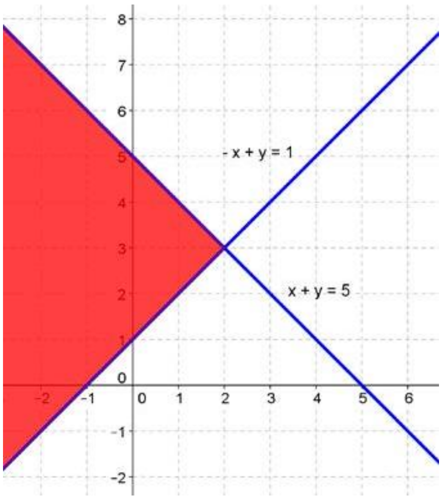
a) $\begin{cases} 3x + y \geq 10 \\ x - 3y \leq 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ -x + y \geq 1 \end{cases}$

Las regiones factibles pueden verse en los dibujos:

a)

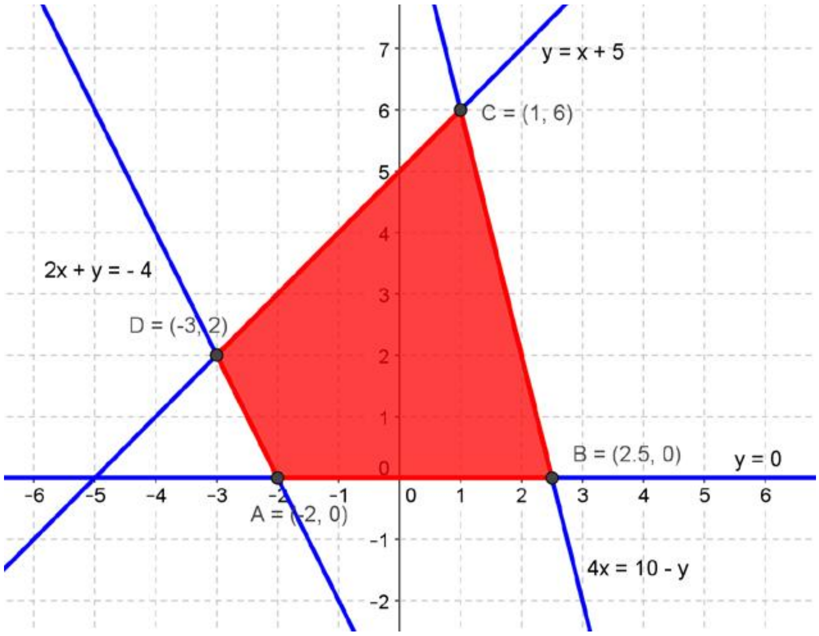


b)



■ 3. Dadas las inecuaciones: y ≤ x + 5, 2x + y ≥ - 4, 4x ≤ 10 – y, y ≥ 0; representa el recinto que limitan y calcula sus vértices.

El recinto que limitan es el que aparece en el dibujo.

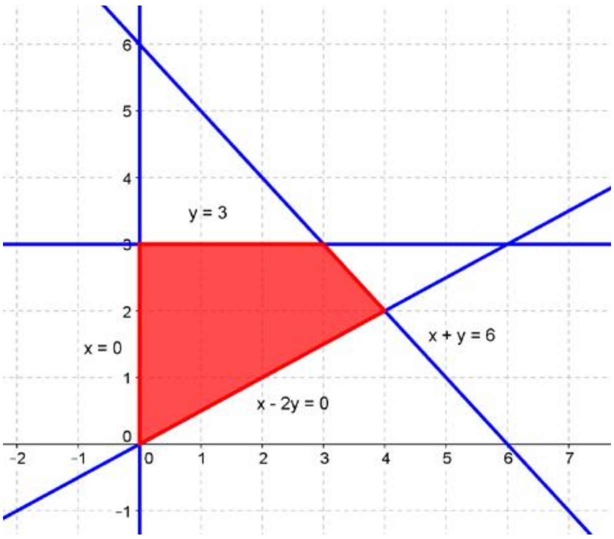


También pueden verse los vértices: A (- 2, 0); B (2,5; 0); C (1, 6) y D (- 3, 2).

4. Para el sistema de inecuaciones siguiente, representa el recinto que limitan, calcula sus vértices y determina todos los puntos de coordenadas enteras que se encuentran en el interior del recinto así como en su frontera.

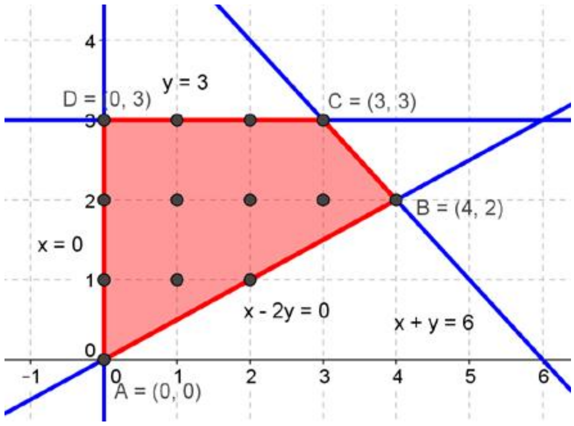
$$\{x - 2y \leq 0,\ x + y \leq 6,\ x \geq 0,\ y \leq 3\}$$

El recinto puede verse en el dibujo:



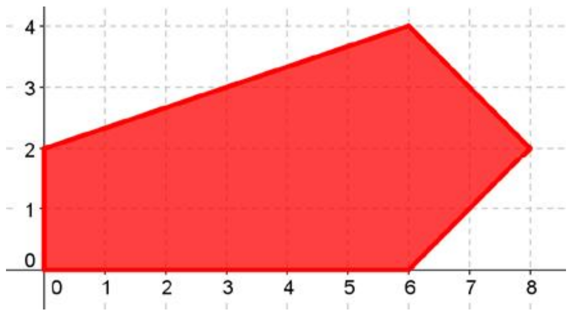
Los vértices son los puntos: A (0, 0); B (4, 2); C (3, 3) y D (0, 3).

Los puntos de coordenadas enteras pedidos, además de los vértices, son: (0, 1); (1, 1); (2, 1); (0, 2); (1, 2); (2, 2); (3, 2); (1, 3) y (2, 3).

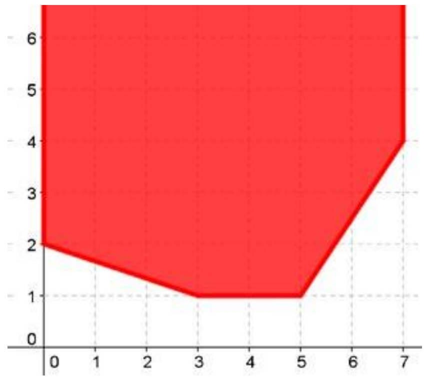


5. ¿Qué sistemas de inecuaciones tienen por solución la región coloreada en cada uno de los gráficos siguientes?

a)



b)



Los sistemas son:

a) $\begin{cases} x - 3y \geq -6 \\ x + y \leq 10 \\ x - y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

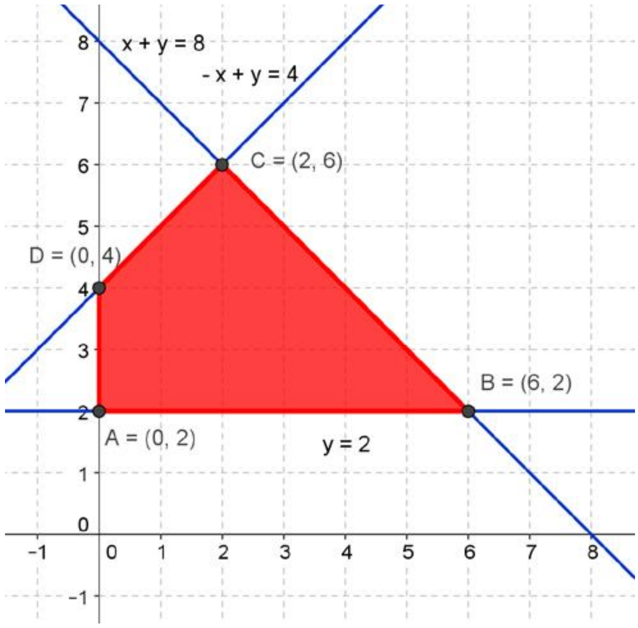
b) $\begin{cases} x + 3y \geq 6 \\ 3x - 2y \leq 13 \\ x \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$

6. a) Representa gráficamente la región del plano definida por las inecuaciones:

{0 ≤ x, 2 ≤ y, x + y ≤ 8, - x + y ≤ 4}

b) Halla los valores máximo y mínimo de la función f (x, y) = x + 3y en dicha región y los puntos en los que se alcanzan.

a) La región pedida en la zona coloreada del dibujo.



Las coordenadas de los vértices son:

$$A:\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A\ (0,\ 2)$$

$$B:\begin{cases} x+y=8 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B\ (6,\ 2)$$

$$C:\begin{cases} x+y=8 \\ -x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow C\ (2,\ 6)$$

$$D:\begin{cases} -x+y=4 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow D\ (0,\ 4)$$

b) Para hallar los valores máximo y mínimo de f (x) = x + 3y en dicha región, sustituimos las coordenadas de los vértices en f (x, y) y obtenemos:

f_A (0, 2) = 0 + 3 · 2 = 6 f_B (6, 2) = 6 + 3 · 2 = 12

f_C (2, 6) = 2 + 3 · 6 = 20 f_D (0, 4) = 0 + 3 · 4 = 12

El mínimo es 6 y se alcanza en el punto A (0, 2).

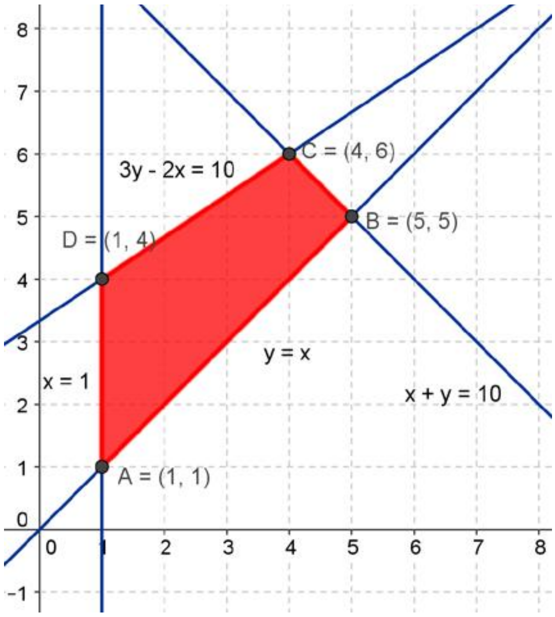
El máximo es 20 y se alcanza en el punto C (2, 6).

7. Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

{x ≥ 1, y ≥ x, x + y ≤ 10, 3y – 2x ≤ 10}

a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.
b) ¿En qué punto o puntos de esta región alcanza los valores máximo y mínimo la función f (x, y) = 2x – 2y + 7?

a) La región factible es la zona coloreada del dibujo.



Las coordenadas de los vértices son:

$$A: \begin{cases} x = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A\ (1,\ 1)$$

$$B: \begin{cases} x + y = 10 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B\ (5,\ 5)$$

$$C: \begin{cases} x + y = 10 \\ -2x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow C\ (4,\ 6)$$

$$D: \begin{cases} -2x + 3y = 10 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow D\ (1,\ 4)$$

b) Para hallar los valores en los que se alcanza el máximo y el mínimo de f (x) = 2x – 2y + 7, en dicha región, sustituimos las coordenadas de los vértices en f (x, y) y obtenemos:

f_A (1, 1) = 2 · 1 – 2 · 1 + 7 = 7 f_B (5, 5) = 2 · 5 – 2 · 5 + 7 = 7

f_C (4, 6) = 2 · 4 – 2 · 6 + 7 = 3 f_D (1, 4) = 2 · 1 – 2 · 4 + 7 = 1

El mínimo es 1 y se alcanza en el punto D (1, 4).

El máximo es 7 y se alcanza en todos los puntos del segmento de extremos A (1, 1) y B (5, 5).

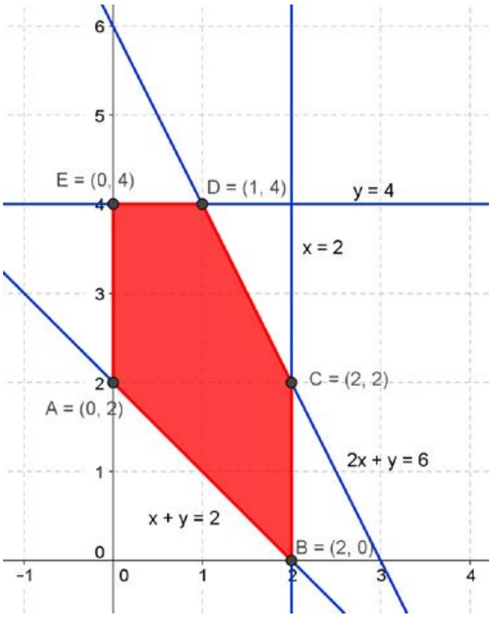
8. Sea el sistema de inecuaciones: {x + y ≥ 2, 2x + y ≤ 6, 0 ≤ x ≤ 2, 0 ≤ y ≤ 4}

a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Calcula, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función f (x, y) = 3x + y en la región definida por el sistema.

c) Calcula, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función g (x, y) = 3x + 3y en la región definida por el sistema.

a) El conjunto de soluciones es la región coloreada del dibujo.



Las coordenadas de los vértices son:

$$A:\begin{cases} x=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A\ (0,\ 2)$$

$$B:\begin{cases} x+y=2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B\ (2,\ 0)$$

$$C:\begin{cases} x=2 \\ 2x+y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow C\ (2,\ 2)$$

$$D:\begin{cases} 2x+y=6 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow D\ (1,\ 4)$$

$$E:\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow E\ (0,\ 4)$$

b) Para hallar el mínimo de f (x) = 3x + y, en dicha región, sustituimos las coordenadas de los vértices en f (x, y) y obtenemos:

f_A (0, 2) = 3 · 0 + 2 = 2 f_B (2, 0) = 3 · 2 + 0 = 6 f_C (2, 2) = 3 · 2 + 2 = 8

f_D (1, 4) = 3 · 1 + 4 = 7 f_E (0, 4) = 3 · 0 + 4 = 4

El mínimo es 2 y se alcanza en el punto A (0, 2).

b) Para hallar el mínimo de g (x) = 3x + 3y, en dicha región, sustituimos las coordenadas de los vértices en f (x, y) y obtenemos:

g_A (0, 2) = 3 · 0 + 3 · 2 = 6 g_B (2, 0) = 3 · 2 + 3 · 0 = 6 g_C (2, 2) = 3 · 2 + 3 · 2 = 12

g_D (1, 4) = 3 · 1 + 3 · 4 = 15 g_E (0, 4) = 3 · 0 + 3 · 4 = 12

El mínimo es 6 y se alcanza en todos los puntos del segmento de extremos A (0, 2) y B (2, 0).

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 109

9**. Un ahorrador dispone de 4000 € para invertir en dos tipos de fondos de inversión a cierto plazo. En el fondo A cada participación tiene un coste de 40 € y produce un beneficio de 15 €, mientras que en el fondo B cada participación da un beneficio de 5 € y su coste es de 50 €. Sabiendo que se puede adquirir un máximo de 60 participaciones del fondo A y al menos 40 del fondo B, determina cuántas participaciones de cada fondo se deben comprar para maximizar el beneficio y calcula ese beneficio.**

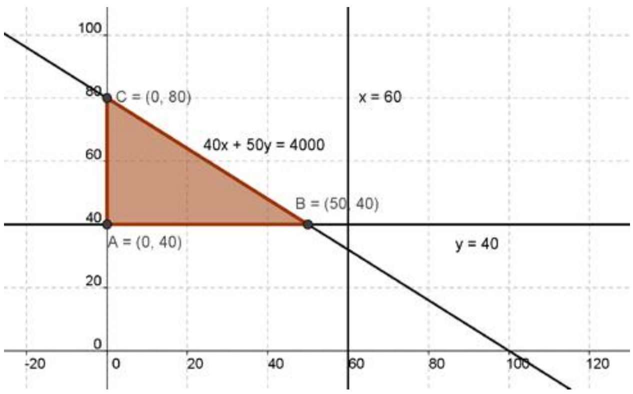
Recogemos la información en una tabla:

Fondos de inversión	**Coste**	**Inversión**	**Beneficios**
A	40 euros	x	15 euros
B	50 euros	y	5 euros
Disponibilidad	4000 euros		

El programa a maximizar es:

Max z = 15x + 5y

$$\text{s.a.} \begin{cases} 40x + 50y \leq 4000 \\ x \leq 60 \\ y \geq 40 \\ x,\ y \ \in N \end{cases}$$



Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.

Hallamos los vértices de la citada región:

$$A(0,\ 40): \begin{cases} x = 0 \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 40 \end{cases}$$

$$B\ (50,\ 40): \begin{cases} 40x + 50y = 4000 \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases}$$

$$C(0,\ 80): \begin{cases} 40x + 50y = 4000 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 80 \end{cases}$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$Z_A = 200$ $Z_B = 950$ $Z_C = 400$

La inversión debe ser: 50 participaciones del fondo A y 40 participaciones del fondo B con un beneficio máximo de:

$15 \cdot 50 + 5 \cdot 40 = 950$ euros.

10. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Cada joya tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 24 euros. La se tipo B se vende a 30 euros y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si el orfebre sólo dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

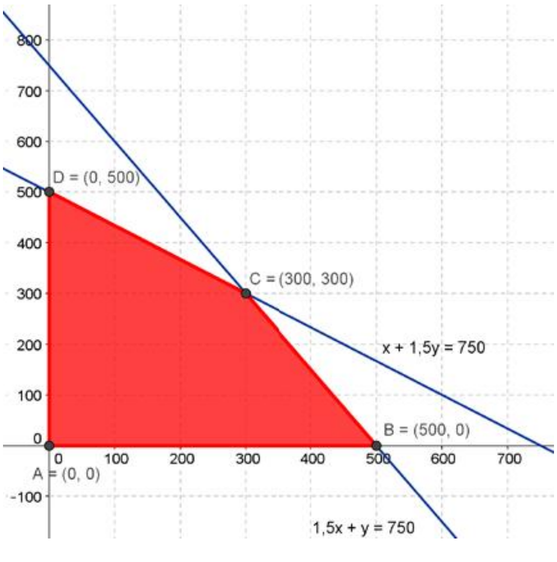
Recogemos la información en una tabla:

	Tipo A	Tipo B	Disponibilidad
Oro	1	1,5	750 g
Plata	1,5	1	750 g
Precio	24 euros	30 euros	
Número de joyas	x	y	

El programa a maximizar es:

Max z = 24x + 30y

$$\text{s.a.} \begin{cases} x + 1{,}5y \le 750 \\ 1{,}5x + y \le 750 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x,\ y \in N \end{cases}$$



Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.

Hallamos los vértices de la citada región:

$$A:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad A\ (0,\ 0)$$

$$B:\begin{cases} 1{,}5x + y = 750 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 500 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad B\ (500,\ 0)$$

$$C:\begin{cases} 1{,}5x + y = 750 \\ x + 1{,}5y = 750 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 300 \end{cases} \Rightarrow C\ (300,\ 300)$$

$$D:\begin{cases} x + 1{,}5y = 750 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 500 \end{cases} \Rightarrow \quad B\ (0,\ 500)$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$Z_A = 0$ $\quad Z_B = 12\,000$ $\quad Z_C = 16\,200$ $\quad Z_D = 15\,000$

El orfebre debe fabricar 300 joyas de tipo A y 300 joyas de tipo B para obtener un beneficio máximo de 16 200 euros.

11. Un deportista solamente puede tomar para desayunar barritas de chocolate y barritas de cereales. Cada barrita de chocolate proporciona 40 gramos de hidratos de carbono, 30 g de proteínas y 200 Kcal, mientras que cada barrita de cereales proporciona 80 g de hidratos de carbono, 10 g de proteínas y 100 Kcal. El deportista quiere tomar al menos 320 g de hidratos de carbono y 90 g de proteínas, pero no quiere tomar más de 1000 Kcal. El coste de cada barrita de chocolate es de 2 euros, mientras que el de cada barrita de cereales es de 1 euro.

Determina cuántas barritas de cada tipo tiene que tomar el deportista para desayunar de forma que se cumpla las condiciones anteriores y gaste la menor cantidad de dinero.

Recogemos la información en una tabla:

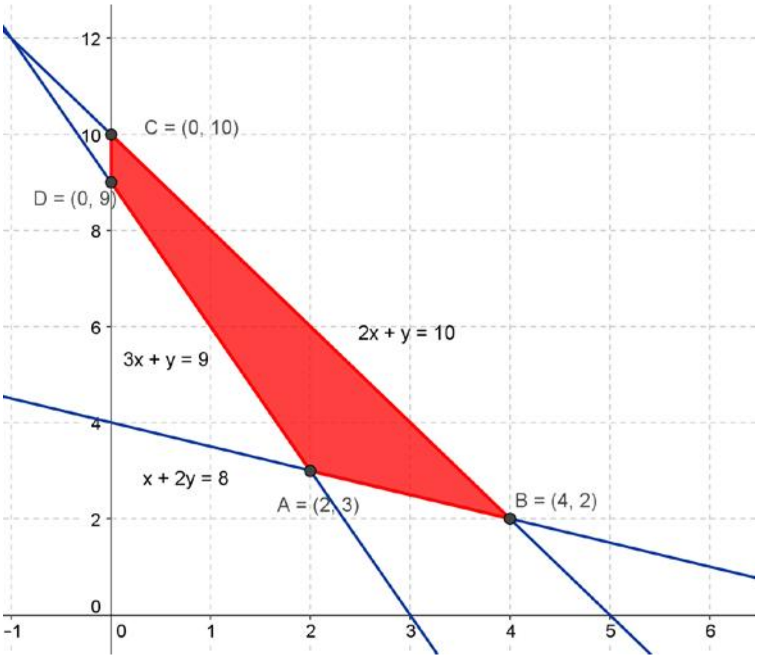
	Chocolate	Cereales	Necesidades
Hidratos de carbono	40	180	320
Proteínas	30	10	90
Kcal	200s	100	1000
Coste	2	1	
Número de barritas	x	y	

El programa a minimizar es:

Min z = 2x + y

$$\text{s.a.}\begin{cases}40x+80y\geq 320\\30x+10y\geq 90\\200x+100y\leq 1000\\x\geq 0\\y\geq 0\end{cases}$$

Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.



Hallamos los vértices de la citada región:

$$A:\begin{cases}3x+y=9\\x+2y=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\Rightarrow A\ (2,\ 3)$$

$$B:\begin{cases}x+2y=8\\2x+y=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}\Rightarrow B\ (4,\ 2)$$

$$C:\begin{cases}2x+y=10\\x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=10\end{cases}\Rightarrow C\ (0,\ 10)$$

$$D:\begin{cases}3x+y=9\\x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=9\end{cases}\Rightarrow B\ (0,\ 9)$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$Z_A = 7$ $Z_B = 10$ $Z_C = 10$ $Z_D = 9$

El deportista tiene que tomar dos barritas de chocolate y tres barritas de cereales.

12. Tenemos que fertilizar unos terrenos de una finca utilizando dos abonos, A y B. El coste del abono A es 0,9 €/kg, y el abono B cuesta 1,5 €/kg. El abono A contiene un 20% de nitrógeno y un 10% de fósforo, mientras que el abono B contiene un 18% y un 15%, respectivamente. Para fertilizar los terrenos correctamente necesitamos un mínimo de 180 kg de nitrógeno y 120 kg de fósforo. ¿Cuál es el gasto mínimo que debemos hacer si queremos fertilizar los terrenos de la finca correctamente?

Recogemos la información en una tabla:

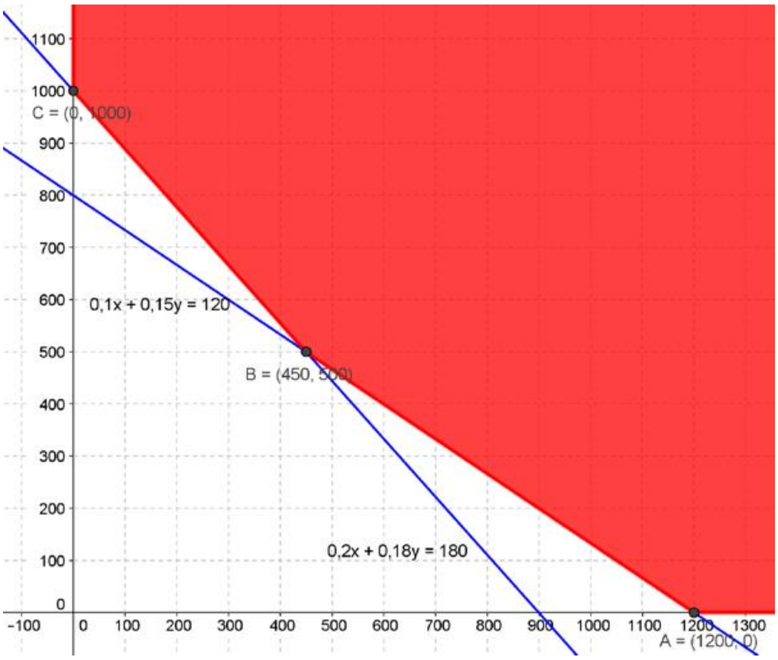
	Abono A	**Abono B**	**Necesidades**
Nitrógeno	20%	18%	180 kg
Fósforo	10%	15%	120 kg
Coste	0,9	1,5	
Kilogramos de abono	x	y	

El programa a minimizar es:

Min z = 0,9x + 1,5y

$$\text{s.a.} \begin{cases} 0{,}2x + 0{,}18y \geq 180 \\ 0{,}1x + 0{,}15y \geq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.



Hallamos los vértices de la citada región:

$$A: \begin{cases} 0{,}1x + 0{,}15y = 120 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1200 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\ (1200,\ 0)$$

$$B: \begin{cases} 0{,}2x + 0{,}18y = 180 \\ 0{,}1x + 0{,}15y = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 450 \\ y = 500 \end{cases} \Rightarrow B\ (450,\ 500)$$

$$C: \begin{cases} 0{,}2x + 0{,}18y = 180 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1200 \end{cases} \Rightarrow C\ (1200,\ 0)$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

Z_A (1200, 0)= 0,9 · 1200 + 1,5 · 0 = 1080

Z_B (450, 500) = 0,9 · 450 + 1,5 · 500 = 1155

Z_C (0, 1000) = 0, 9 · 0 + 1,5 · 1000 = 1500

El gasto mínimo que tenemos que hacer para fertilizar la finca es 1080 €, lo que conseguimos comprando 1200 kg de fertilizante A.

13. Una empresa fabrica dos modelos de sillas de ruedas. Los recursos disponibles y las cantidades requeridas para cada silla se dan en la siguiente tabla:

	Modelo 1	Modelo 2	Disponibilidad
Horas de mano de obra	**2**	**4**	**1000**
Unidades de acero	**3**	**1**	**600**
Motores	**-**	**1**	**200**

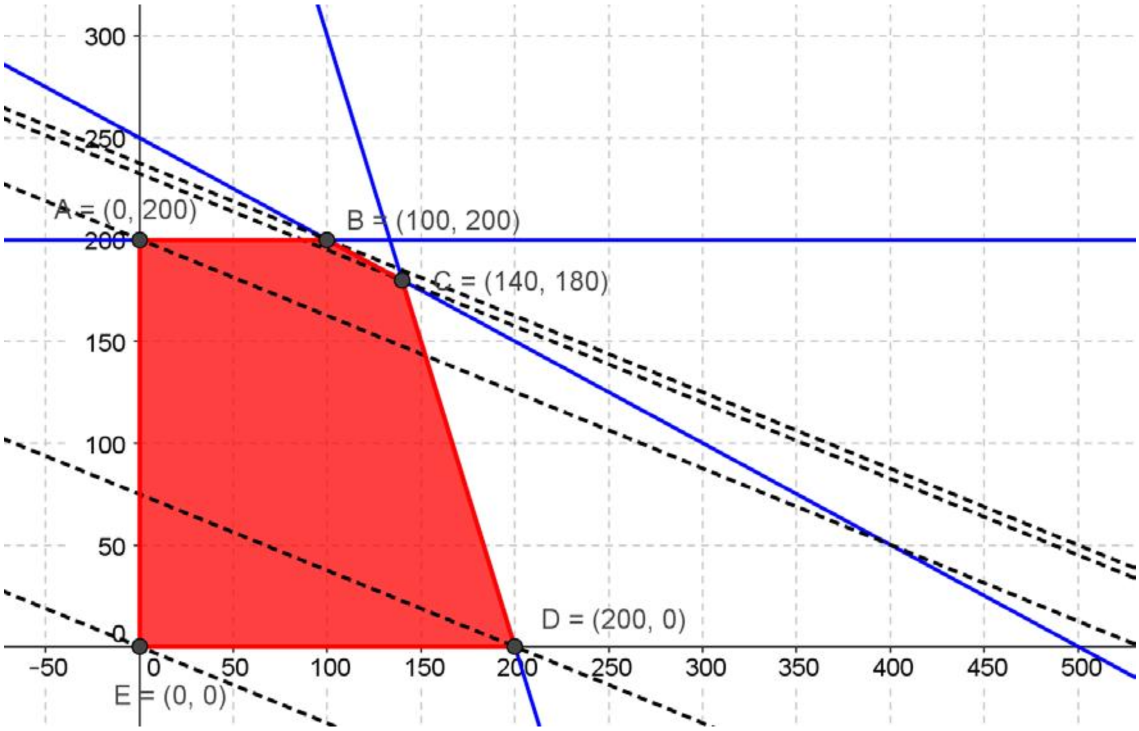
Si cada silla del modelo 1 da un beneficio de 60 euros y cada silla del modelo 2 de 160 euros, ¿cuántas unidades de cada modelo se han de fabricar para maximizar el beneficio? La resolución del programa lineal debe hacerse por el método gráfico, además, analiza gráficamente qué ocurre si la disponibilidad de acero se reduce a 410 unidades.

Sea x el número de sillas del modelo 1 e y el número de sillas del modelo 2, el programa a maximizar es:

Max z = 60x + 160y

$$\text{s.a.} \begin{cases} 2x + 4y \le 1000 \\ 3x + y \le 600 \\ 0 \le y \le 200 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada, como puede verse en la imagen.



Trazamos la recta 60x + 160y = 0, es decir, 3x + 8y = 0, y las rectas paralelas a ella, que pasan por los vértices de la región factible.

Estas rectas (en trazo discontinuo en el dibujo) son:

Por A: 3x + 8y - 1600 = 0 Por B: 3x + 8y – 1900 = 0

Por C: 3x + 8y – 1860 = 0 Por D: 3x + 8y – 600= 0

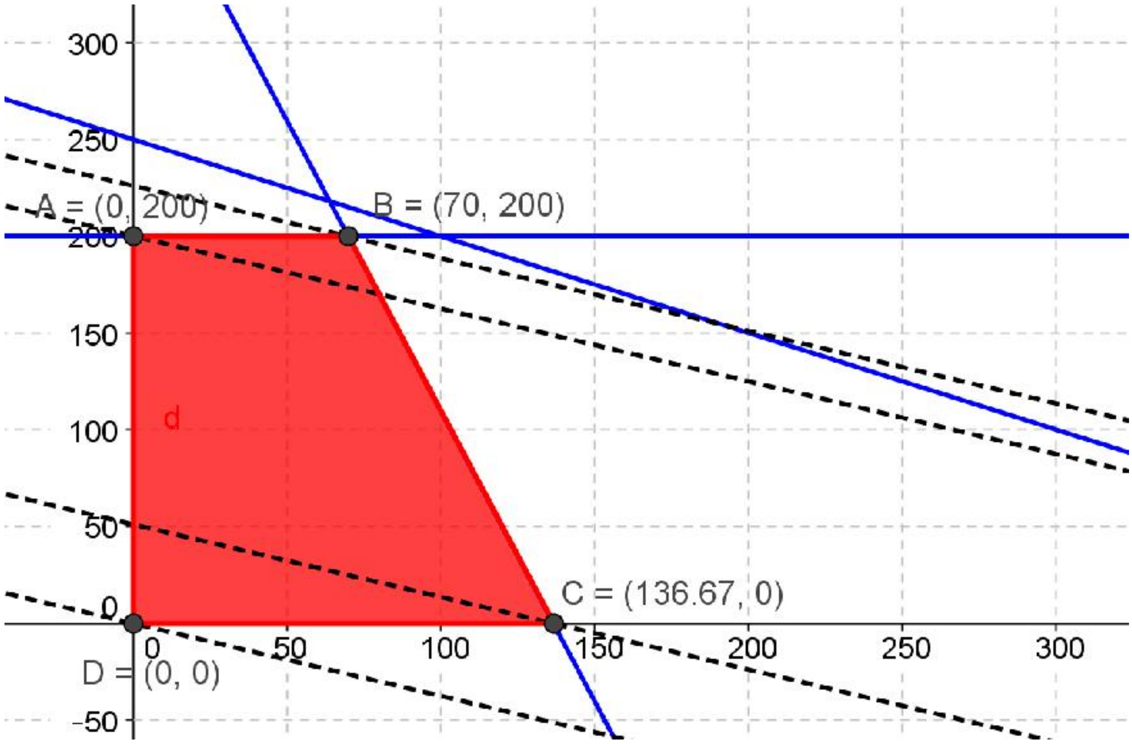
De estas rectas, la que corta al eje OY en el punto de mayor ordenada es la que pasa por el vértice B (100, 200), en el cual, la función objetivo alcanza su máximo.

Para maximizar el beneficio, hay que fabricar 100 sillas del modelo 1 y 200 sillas del modelo 2.

Si la disponibilidad de acero se reduce a 410 unidades, las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 1000 \\ 3x + y \leq 410 \\ 0 \leq y \leq 200 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada, como puede verse en la imagen.



Trazamos la recta 60x + 160y = 0, es decir, 3x + 8y = 0, y las rectas paralelas a ella, que pasan por los vértices de la región factible.

Estas rectas (en trazo discontinuo en el dibujo) son:

Por A: 3x + 8y - 1600 = 0 Por B: 3x + 8y – 1810 = 0

Por C: 3x + 8y – 410 = 0

De estas rectas, la que corta al eje OY en el punto de mayor ordenada es la que pasa por el vértice B (70, 200), en el cual, la función objetivo alcanza su máximo.

Para maximizar el beneficio, habría que fabricar 70 sillas del modelo 1 y 200 sillas del modelo 2.

14. Una carpintería elabora dos tipos de muebles, A y B. Cada mueble de tipo A requiere 6 días de trabajo para su elaboración, mientras que cada mueble de tipo B requiere 3 días.. Por la estructura organizativa de dicha empresa, cada mes, que consta de 30 días laborables, se pueden elaborar, a lo suma 4 muebles de tipo A y 8 de tipo B.

a) ¿Cuántos muebles de cada tipo puede fabricar en un mes para cumplir con todos los requerimientos?

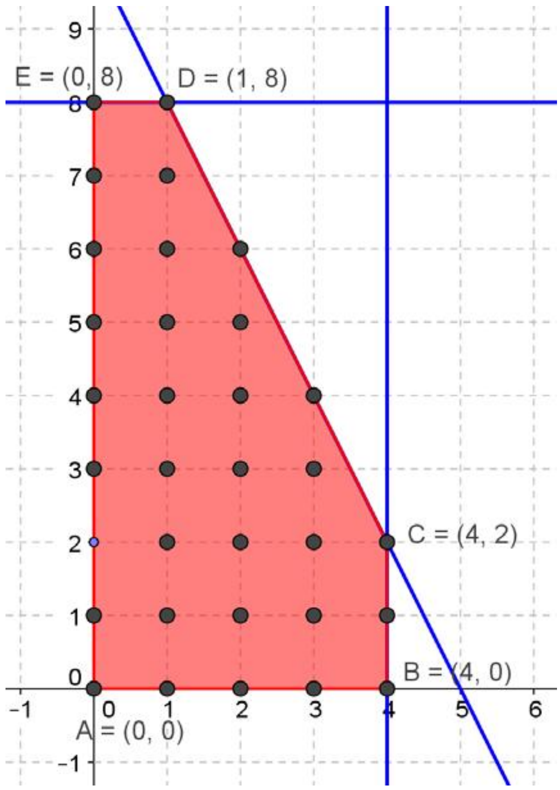
b) Si venden todo lo que fabrican y el beneficio proporcionado por cada mueble tipo A vendido es de 500 euros y por cada mueble de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos muebles de cada tipo deberían fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuántos tendrían que fabricar para maximizar el número de muebles elaborados?

a) Sea x el número de muebles de tipo A e y el número de muebles de tipo B.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 8 \\ 6x + 3y \le 30 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones son los puntos de coordenadas enteras de la zona sombreada del dibujo.



b) La función beneficio es f (x, y) = 500x + 200y.

Para determinar su máximo, sustituimos en ella los vértices de la región del conjunto de soluciones:

$f_A(0, 0) = 500 \cdot 3 + 200 \cdot 0 = 0$ $f_B(0, 0) = 500 \cdot 4 + 200 \cdot 0 = 2000$

$f_C(4, 2) = 500 \cdot 4 + 200 \cdot 2 = 2400$ $f_D(1, 8) = 500 \cdot 1 + 200 \cdot 8 = 2100$

$f_A(0, 8) = 500 \cdot 0 + 200 \cdot 8 = 1600$

Para maximizar el beneficio, tienen que fabricar 4 muebles de tipo A y 2 muebles de tipo B.

La función "máximo número de muebles elaborados" es g (x, y) = x + y. Para hallar su máximo, procedemos como en el caso anterior:

$g_A(0, 0) = 0 + 0 = 0$ $g_B(0, 0) = 4 + 0 = 4$ $g_C(4, 2) = 4 + 2 = 6$

$g_D(1, 8) = 1 + 8 = 9$ $g_A(0, 8) = 0 + 8 = 8$

El máximo número de muebles elaborados se obtiene fabricando un mueble tipo A y 8 muebles tipo B.

15. En una ciudad existen dos depósitos de harina A y B y tres panaderías P, Q y R. En el depósito A se almacenan 50 toneladas de harina y en el B 70. Las 120 toneladas que hay en total se reparten del siguiente modo: 30 para P, 50 para Q y 40 para R. El coste, en unidades monetarias, del transporte de una tonelada de un depósito a una panadería viene dado en la tabla adjunta. ¿Cómo debe hacerse la distribución de las 120 toneladas para que el coste del transporte sea mínimo?

	P	Q	R
A	8	3	5
B	2	4	4

Si llamamos x a las toneladas a transportar desde el depósito A a la panadería P e y a las toneladas a trasportar desde el depósito B a la panadería Q, toda la distribución de la harina, en función de las variables anteriores, queda en la forma que recoge la tabla que sigue:

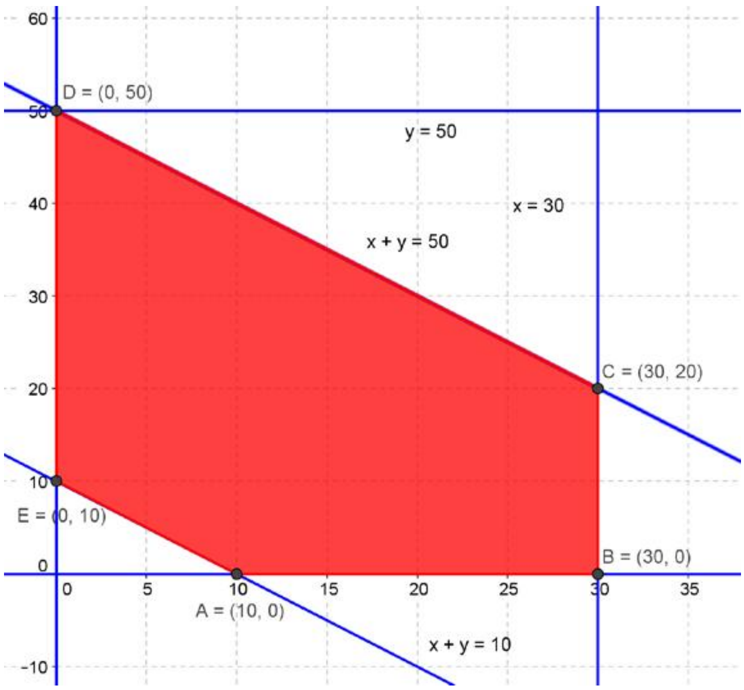
	P	Q	R
A	x	y	50 – x – y
B	30 - x	50 - y	- 10 + x + y

El programa lineal a resolver es:

Min z = 5x – 2y + 470

$$\text{s. a.} \begin{cases} x \geq 0; \;\; y \geq 0 \\ x \leq 30, \;\; y \leq 50 \\ x + y \leq 50 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$$

La región factible es la zona coloreada del dibujo.



El valor de la función objetivo en los vértices de la región factible es:

z_A (10, 0) = 5 · 10 – 2 · 0 + 470 = 520 z_B (30, 0) = 5 · 30 – 2 · 0 + 470 = 620

z_C (30, 20) = 5 · 30 – 2 · 20 + 470 = 580 z_D (0, 50) = 5 · 0 – 2 · 50 + 470 = 370

z_E (0, 10) = 5 · 0 – 2 · 10 + 470 = 450

En el vértice D (0, 50) se minimiza la función objetivo, por tanto, la solución es x = 0, y = 50, es decir, las cantidades a transportar son las que aparecen en la tabla que sigue:

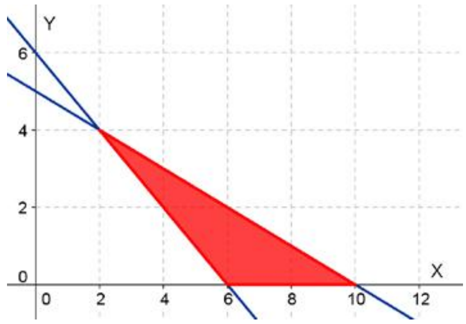
	P	Q	R
A	0	50	0
B	30	0	40

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 110

1. Considera la región sombreada del dibujo:

a) Determina el sistema de inecuaciones que delimita.

b) Calcula el valor máximo de la función z = x + 2y en esta región e indica para qué valores se alcanza dicho máximo.



a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos (6, 0) y (0, 6) es x + y = 6.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (10, 0) y (0, 5) es x + 2y = 10.

Por tanto, el sistema que delimita la región sombreada, incluyendo los bordes, es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) El máximo de la función z = x + 2y en la región sombreada se alcanza en uno de sus vértices:

z (6, 0) = 6 + 2 · 0 = 6   z (10, 0) = 10 + 2 · 0 = 10   z (2, 4) = 2 + 2 $ 4 = 10

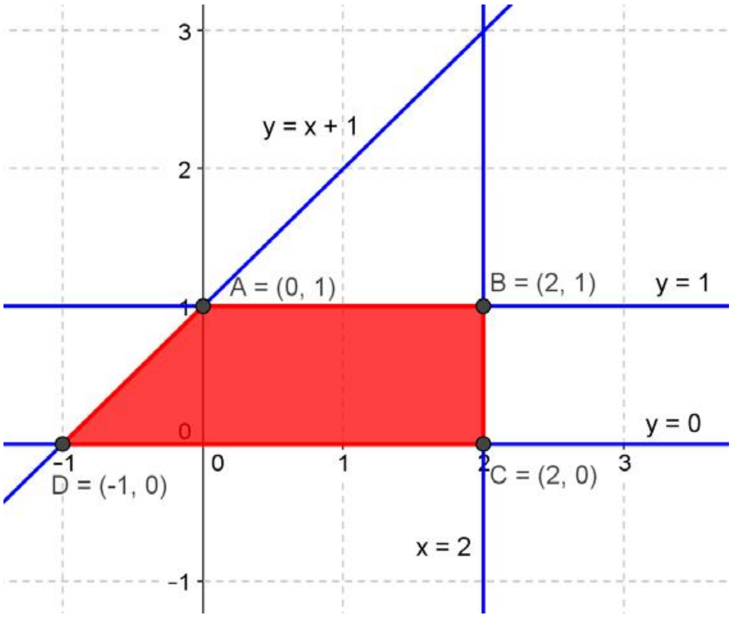
El máximo de la función z = x + 2y en esta región es 10 y se alcanza en el segmento que une los puntos (2, 4) y (10, 0).

■ 2. a) Representa gráficamente el recinto limitado por las desigualdades siguientes:

{0 ≤ y ≤ 1; y – 1 ≤ x ≤ 2}

b) Halla los valores máximo y mínimo de la función f (x, y) = - x + 2y en dicho recinto, así como los puntos en los que se alcanza dichos valores.

a) El recinto pedido puede verse en el dibujo.



b) La región factible es la zona sombreada del apartado anterior.

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo f (x, y) = - x + 2y:

f_A (0, 1) = - 0 + 2 · 1 = 2 f_B (2, 1) = - 2 + 2 · 1 = 0

f_C (2, 0) = - 2 + 2 · 0 = - 2 f_D (- 1, 0) = - (- 1) + 2 · 0 = 1

El valor máximo, 2, se alcanza en el punto A (0, 1) y el valor mínimo, - 2, se alcanza en el punto C (2, 0).

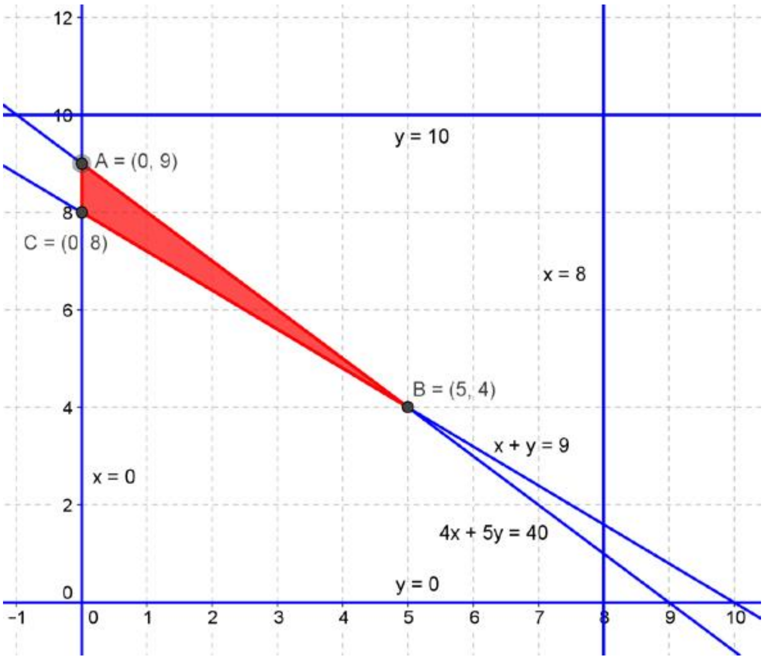
3. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero solo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autobús grande cuesta 80 € y el de uno pequeño 60 €. ¿Cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible?

a) Siendo x el número de autocares de 40 plazas e y el número de autocares de 50 plazas, el programa a optimizar es:

Min z = 60x + 80y

$$\text{s.a.} \begin{cases} 40x + 50y \geq 400 \\ x + y \leq 9 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.



Hallamos los vértices de la citada región:

$$A : \begin{cases} x + y = 9 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow A\ (0, 9)$$

$$B : \begin{cases} x + y = 9 \\ 4x + 5y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B\ (5, 4)$$

$$C : \begin{cases} 4x + 5y = 40 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow C\ (0, 8)$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$Z_A = 720$ $Z_B = 620$ $Z_C = 640$

Para que la excursión resulte los más económica posible, hay que utilizar 5 autocares de 40 plazas y 4 de 50 plazas.

4. Una industria papelera elabora dos clases de papel a partir de dos tipos de madera. Las cantidades de madera necesarias por unidad de cada tipo de papel y las disponibilidades semanales (en las unidades adecuadas) aparecen en la tabla:

	Papel 1	Papel 2	Disponibilidades
Madera 1	**8**	**8**	**64**
Madera 2	**4**	**8**	**50**

Si el beneficio neto por cada unidad de papel son 100 000 y 200 000 unidades monetarias respectivamente, ¿qué cantidad de papel de cada clase nos dará un beneficio máximo?

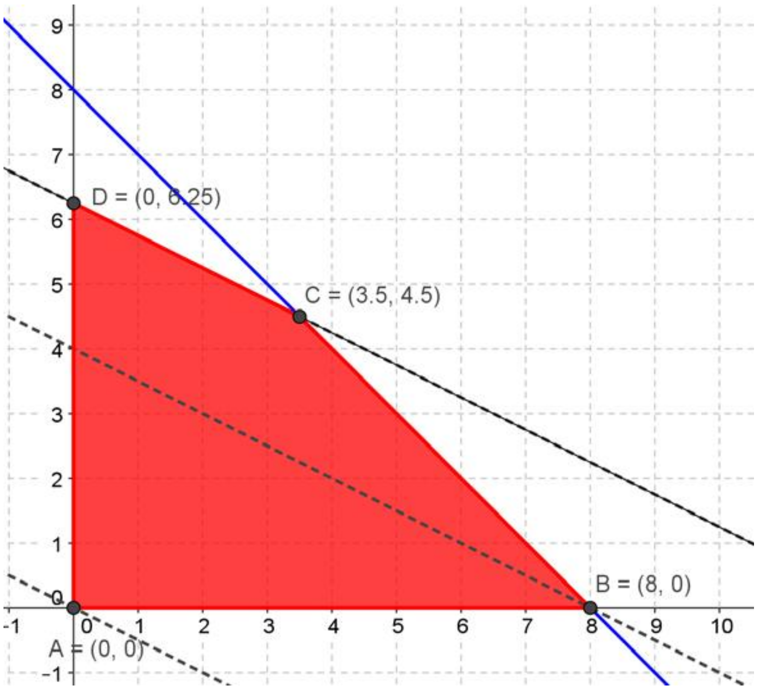
La resolución del programa lineal debe hacerse por el método gráfico, además, analiza gráficamente qué ocurre si las disponibilidades de madera 1 se reducen a 50 unidades.

a) Sea x el número de unidades de papel 1 e y el número de unidades de papel 2, el programa a maximizar es:

Max z = 100 000x + 200 000y

$$\text{s.a.} \begin{cases} 8x + 8y \leq 64 \\ 4x + 8y \leq 50 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada, como puede verse en la imagen.



Trazamos la recta 100 000x + 200 000y = 0, es decir, x + 2y = 0, y las rectas paralelas a ella, que pasan por los vértices de la región factible.

Estas rectas (en trazo discontinuo en el dibujo) son:

Por A: x + 2y = 0 Por B: x + 2y – 8 = 0

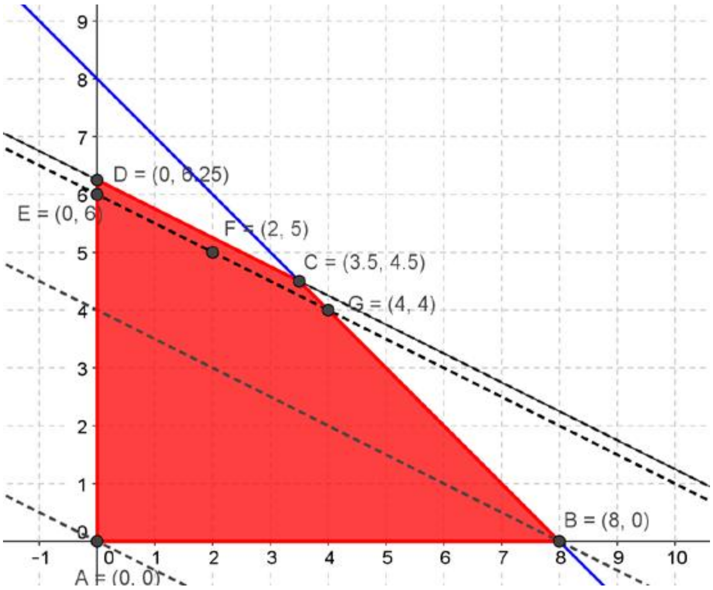
Por C: x + 2y – 12,5 = 0 Por D: x + 2y – 12,5= 0

De estas rectas, la que corta al eje OY en el punto de mayor ordenada es la que pasa por los vértices C (3,5; 4,5) y D (0; 6,25).

Como los puntos del segmento CD no tiene ambas coordenadas enteras, trazamos la recta de nivel más próxima al segmento CD que pasa por el punto (0, 6), x + 2y – 12 = 0. Los puntos de la región factible que pertenecen a esa recta y tienen las dos coordenadas enteras son los que maximizan el beneficio.

Estos son E (0, 6), F (2,5) y G (4, 4); es decir, hay que elaborar 6 unidades de papel 2, o 2 unidades de papel 1 y 5 unidades de papel 2, o bien 4 unidades de cada tipo de papel.

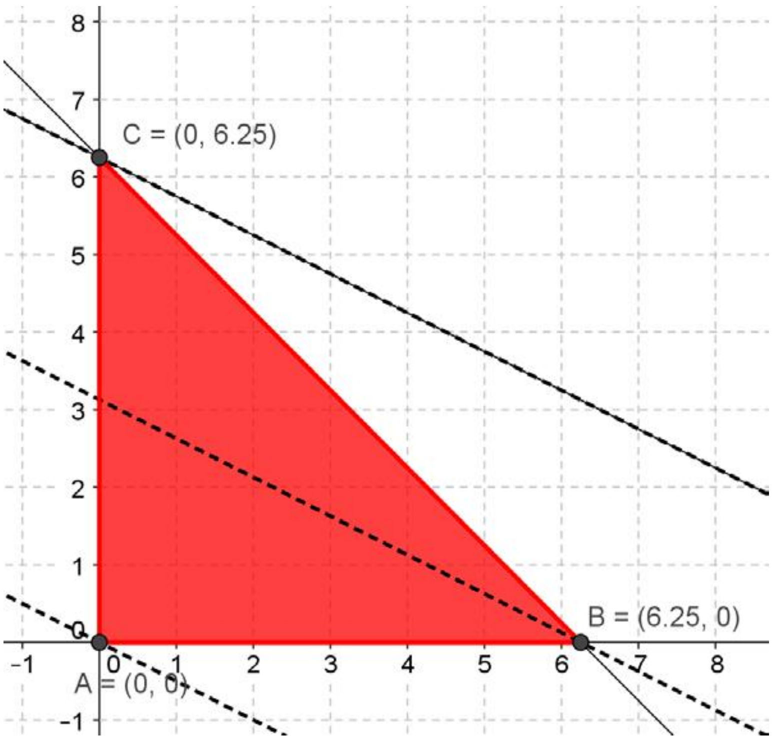
El beneficio máximo en todos los casos es de 1 200 000 unidades monetarias.



b) Ahora las restricciones son:

$$\begin{cases} 4x + 4y \leq 25 \\ 2x + 4y \leq 25 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Procediendo como en el caso anterior se obtiene:



Ahora la solución sería solo el vértice (0, 6,25), pero como no tiene coordenadas enteras es el punto (0, 6). En este caso, para maximizar el beneficio hay que elaborar 6 unidades de papel 2 y ninguna de papel 1.

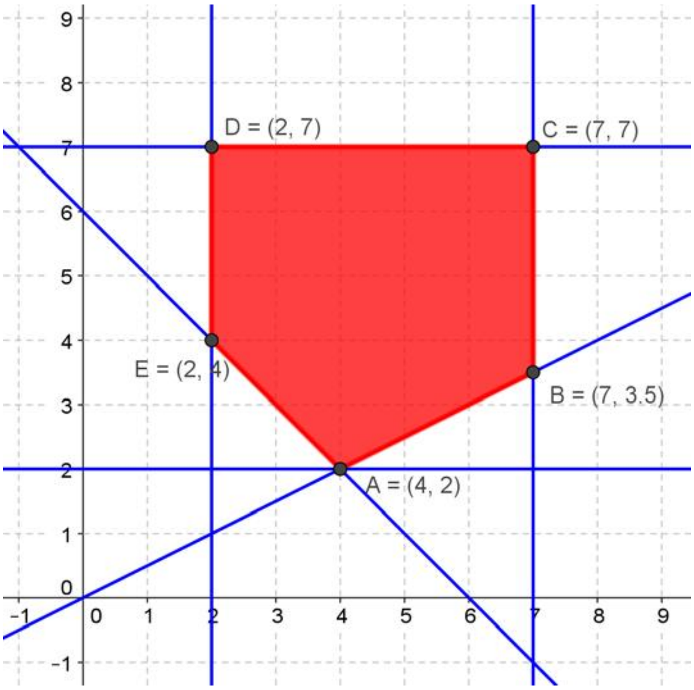
5. Un cadena de supermercados compra naranjas a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden naranjas a 1000 y 1500 euros por tonelada, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para satisfacer la demanda, la cadena debe comprar en total como mínimo 6 toneladas. La cadena debe comprar como máximo al distribuidor A el doble de naranjas que al distribuidor B. ¿Qué cantidad de naranjas debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste? Determina dicho coste mínimo.

Sea x el número de toneladas de tipo A e y el número de toneladas de tipo B, el programa lineal a resolver es:

Mix z = 1000x + 1500y

$$\text{s. a.} \begin{cases} 2 \leq x \leq 7 \\ 2 \leq y \leq 7 \\ x + y \geq 6 \\ x - 2y \leq 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada:



Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo:

z_A (4, 2) = 1 000 · 4 + 1 500 · 2 = 7 000

z_B (7; 3,5) = 1 000 · 7 + 1 500 · 3,5 = 12 250

z_C (7, 7) = 1 000 · 7 + 1 500 · 7 = 17 500

z_D (2, 7) = 1 000 · 2 + 1 500 · 7 = 12 500

z_E (2, 4) = 1 000 · 2 + 1 500 · 4 = 8 000

Para obtener el mínimo coste, ha de comprar 4 toneladas al distribuidor A y 2 toneladas al distribuidor B. El coste mínimo asciende a 7 000 euros.

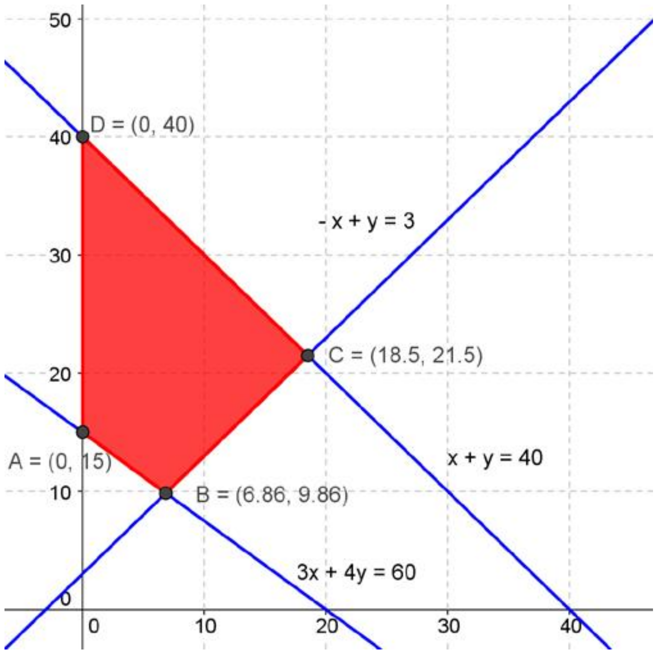
6. Un agricultor estima que el cuidado de cada metro cuadrado cultivado de lechugas requiere semanalmente 45 minutos, mientras que el de coles exige 50. Dispone de un terreno de 40 m^2 de extensión que puede dedicar total o parcialmente al cultivo de las dos verduras, pero quiere plantar al menos 3 m^2 de más de coles que de lechugas. El metro cuadrado de lechugas le reporta un beneficio de 3 €, mientras que el de coles le proporciona 4 €, planificando obtener al menos un beneficio de 60 €. ¿Cuánta extensión le interesa plantar de cada verdura si su objetivo es que el tiempo dedicado al cuidado de cada cultivo sea mínimo?

Sea x el número de m^2 plantado de lechugas e y el número de m^2 plantado de coles. El programa lineal a resolver es:

Max z = 45x + 50 y

$$\text{s. a.} \begin{cases} x + y \le 40 \\ y \ge x + 3 \\ 3x + 4y \ge 60 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada del dibujo:



Los vértices de la región factible son los puntos A (0, 15), B (6,86; 9,86), C (18,5; 21,5) y D (0, 40).

Para hallar el mínimo tiempo, sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo:

z_A (0, 15) = 45 · 0 + 50 · 15 = 750

z_B (6,86; 9,86) = 45 · 6,86 + 50 · 9,86 = 801, 43

z_C (18,5; 21,5) = 45 · 18,5 + 50 · 21,5 = 1907,5

z_D (0, 40) = 45 · 0 + 50 · 40 = 2000

Le interesa plantar 15 m^2 de coles y no plantar lechugas.

7. Un tendero va al mercado central con su furgoneta, que puede cargar 700 kilogramos, y con 500 euros en el bolsillo, a comprar fruta para su tienda. Encuentra manzanas a 0,80 €/kg y naranjas a 0,50 €/kg. Calcula que podrá vender las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,58 €/kg. ¿Qué cantidad de manzanas y de naranjas le conviene comprar si quiere obtener el mayor beneficio posible?

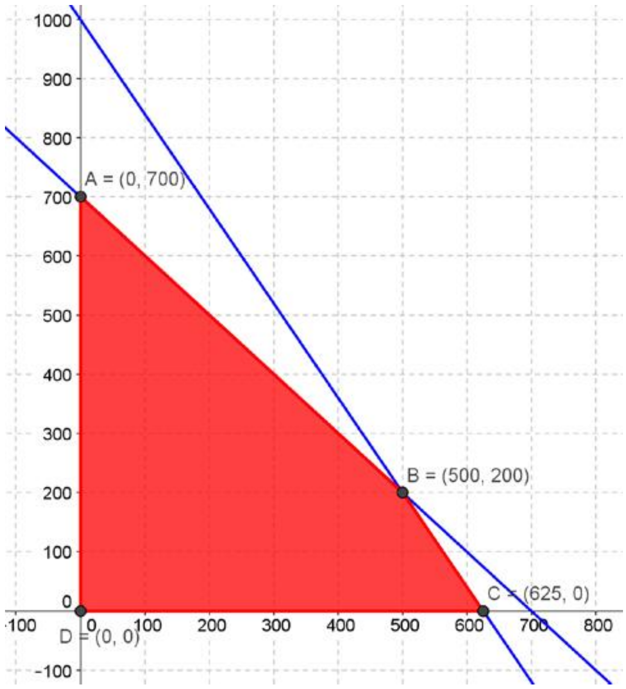
Sean x los kilogramos de manzanas e y los kilogramos de naranjas que compra. La función que queremos maximizar es z (x, y) = 0,10x + 0,80y, puesto que Beneficios = Ingresos – Costes.

El programa lineal a optimizar es:

Max z = 0,10x + 0,80y

$$\text{s. a.}\begin{cases} x + y \leq 700 \\ 0{,}80x + 0{,}50y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada:



Los vértices de la región factible son los puntos:

A (0, 700), B (500, 200), C (625, 0) y D (0, 0).

Para obtener el máximo, sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo:

z_A (0, 700) = 0,10 · 0 + 0,80 · 700 = 56

z_B (500, 200) = 0,10 · 500 + 0,80 · 200 = 66

z_C (625, 0) = 0,10 · 625 + 0,80 · 0 = 62,5

z_A (0, 0) = 0,10 · 0 + 0,80 · 0 = 0

Para obtener el máximo beneficio, 66 euros, le conviene comprar 500 kg de manzanas y 200 kg de naranjas.