

Septiembre 17

Opción A

1A- Una conocida cadena de ropa ha rebajado sus precios. Un pantalón, una camisa y un abrigo valían en temporada 360 euros en total. En las primeras rebajas, el pantalón se rebajó un 10% y la camisa un 20%, con lo que un cliente podía llevarse ambas prendas por 137 euros. En las segundas rebajas, y sobre el precio de temporada, el pantalón se rebajó un 20% y el abrigo un 30%, por lo que juntos costaban 212 euros. Calcula el precio de cada prenda en temporada.

Llamemos x = precio del pantalón en temporada, y = precio de la camisa en temporada, z = precio del abrigo en temporada.

Traducimos cada frase en una ecuación.

Un pantalón, una camisa y un abrigo valían en temporada 360 euros en total $\rightarrow x + y + z = 360$

En las primeras rebajas, el pantalón se rebajó un 10% y la camisa un 20%, con lo que un cliente podía llevarse ambas prendas por 137 euros $\rightarrow 0,9x + 0,8y = 137$

En las segundas rebajas, y sobre el precio de temporada, el pantalón se rebajó un 20% y el abrigo un 30%, por lo que juntos costaban 212 euros $\rightarrow 0,8x + 0,7z = 212$

Juntamos las ecuaciones y resolvemos el sistema resultante.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} x + y + z = 360 \\ 0,9x + 0,8y = 137 \\ 0,8x + 0,7z = 212 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 360 \\ 9x + 8y = 1370 \\ 8x + 7z = 2120 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \left. \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 9 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 9x + 8y = 1370 \\ -9x - 9y - 9z = -3240 \\ \hline -y - 9z = -1870 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - 8 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 8x + 7z = 2120 \\ -8x - 8y - 8z = -2880 \\ \hline -8y - z = -760 \end{array} \right] \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 360 \\ -y - 9z = -1870 \\ -8y - z = -760 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - 8 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ -8y - z = -760 \\ +8y + 72z = 14960 \\ \hline 71z = 14200 \end{array} \right] \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \left. \begin{array}{l} x + y + z = 360 \\ -y - 8z = -1870 \\ 71z = 14200 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{z = \frac{14200}{71} = 200} \Rightarrow \\ & -y - 1800 = -1870 \Rightarrow \boxed{y = 70} \Rightarrow x + 70 + 200 = 360 \Rightarrow \boxed{x = 90} \end{aligned}$$

Los precios en temporada son de 90 € el pantalón, 70 € la camisa y 200 € el abrigo.

2A- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4-x^2} & 0 < x < 2 \\ 2x & 2 \leq x < 4 \end{cases}$.

a) Estudia razonadamente su continuidad.

b) Calcula el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[2,3]$.

a) Para $0 < x < 2$ la función es $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$ que es continua salvo en los valores que anulan el denominador.

$4-x^2 = 0 \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$. Ninguno de estos dos valores de x están en el dominio de definición de la función. Es continua en $0 < x < 2$.

Para $2 < x < 4$ la función es $f(x) = 2x$. Es una función polinómica, que es continua.

Falta por comprobar en el cambio de definición de la función, en $x = 2$.

- Existe $f(2) = 4$, Se cumple.

- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{0} = -\infty$. No se cumple.

La función no es continua en $x = 2$

Resumiendo: La función es continua en $(0, 2) \cup (2, 4)$.

b) Veamos si la función corta al eje OX en el intervalo $[2,3]$.

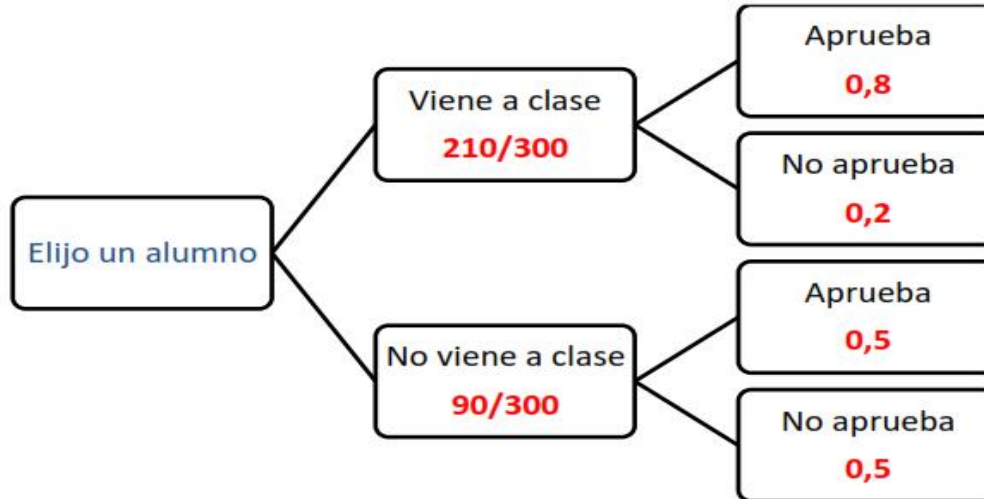
En este intervalo la función es $f(x) = 2x$. Para que corte al eje OX debe ser $f(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, que no pertenece al intervalo $[2,3]$.

El área pedida es la integral definida:

$$\int_2^3 2x dx = [x^2]_2^3 = [3^2] - [2^2] = 9 - 4 = \boxed{5 \text{ u}^2}$$

3A- En una asignatura de primer curso de un grado universitario, asisten a clase regularmente 210 alumnos de los 300 alumnos matriculados. Al finalizar el período docente, superan la asignatura el 80% de los alumnos que asisten regularmente a clase y el 50% de los alumnos que no asisten regularmente a clase. Se elige un alumno matriculado al azar.
a) Calcula la probabilidad de que haya superado la asignatura y no haya asistido regularmente a clase. **(Hasta 1 punto)**
b) Sabiendo que ha superado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido regularmente a clase? **(Hasta 2 puntos)**

Realicemos un diagrama de árbol para ayudarnos a calcular las probabilidades pedidas.



a)

$$\begin{aligned}
 P(\text{Apruebe y no haya asistido a clase}) &= \\
 &= P(\text{No haya asistido a clase})P(\text{Apruebe} / \text{No ha asistido a clase}) = \\
 &= \frac{90}{300} \cdot \frac{50}{100} = \frac{4500}{30000} = \frac{45}{300} = \boxed{\frac{15}{100} = 0,15}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 P(\text{Haya asistido a clase} / \text{Ha aprobado}) &= \\
 &= \frac{P(\text{Haya asistido a clase y ha aprobado})}{P(\text{Ha aprobado})} = \frac{\frac{210}{300} \cdot 0,8}{\frac{210}{300} \cdot 0,8 + \frac{90}{300} \cdot 0,5} = \\
 &= \frac{\frac{168}{300}}{\frac{168}{300} + \frac{45}{300}} = \frac{168}{168 + 45} = \boxed{\frac{168}{213} = 0,79}
 \end{aligned}$$

4A- En un grupo de 8 amigos se encuentran los 3 agraciados con un viaje para visitar Lisboa sorteado por la embajada portuguesa. Si hay 4 amigos que ya han visitado Lisboa, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de los agraciados haya visitado Lisboa?

De los 8 amigos 4 han visitado Lisboa y los otros 4 no.

Si elegimos 3 de los 8 amigos.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Ninguno de los 3 elegidos ha visitado Lisboa}) &= \\
 &= P(\text{El elegido 1 no ha visitado Lisboa}) \cdot \\
 &\cdot P(\text{El 2º no ha visitado Lisboa} / \text{El 1º no ha visitado Lisboa}) \cdot \\
 &\cdot P(\text{El 3º no ha visitado Lisboa} / \text{Ni el 1º, ni el 2º han visitado Lisboa}) = \\
 &= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{24}{336} = \boxed{\frac{1}{14} = 0,071}
 \end{aligned}$$

Opción B

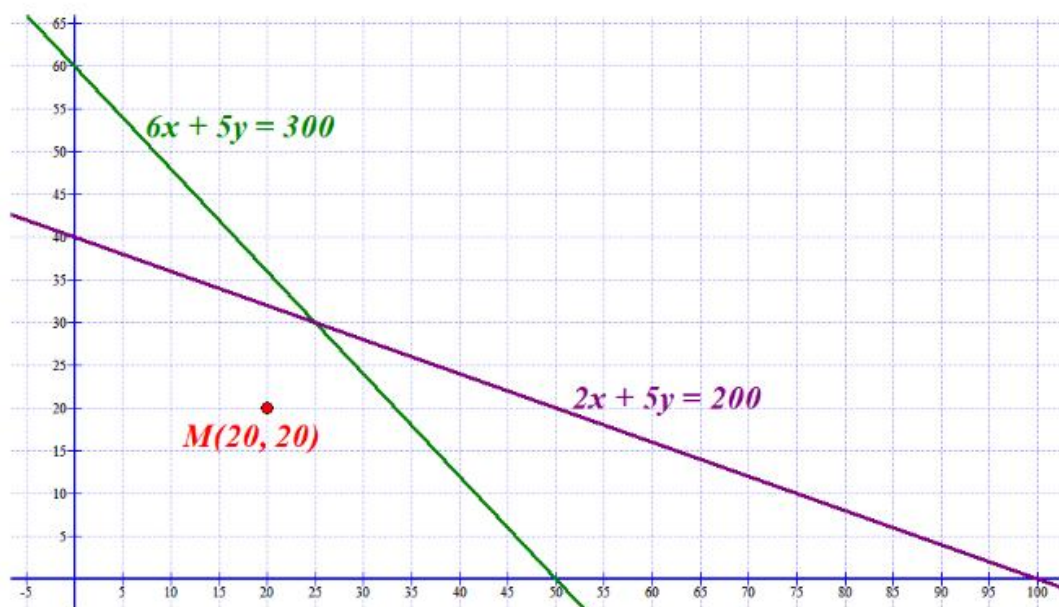
1B- Una empresa dispone de dos talleres para la reparación de motos y coches. El primero de los talleres dispone de 300 horas de trabajo como máximo y necesita 6 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche. El segundo de los talleres dispone de 200 horas de trabajo como máximo y necesita 2 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche. El beneficio neto que obtiene la empresa por cada moto reparada es de 1000 € mientras que el beneficio neto que obtiene por cada coche reparado es de 1500 €. Calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántos coches y motos ha de reparar para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

Llamemos x al número de motos que se reparan e y al número de coches que se reparan.

Las restricciones del problema son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 5y \leq 300 \\ 2x + 5y \leq 200 \end{array} \right\}$$

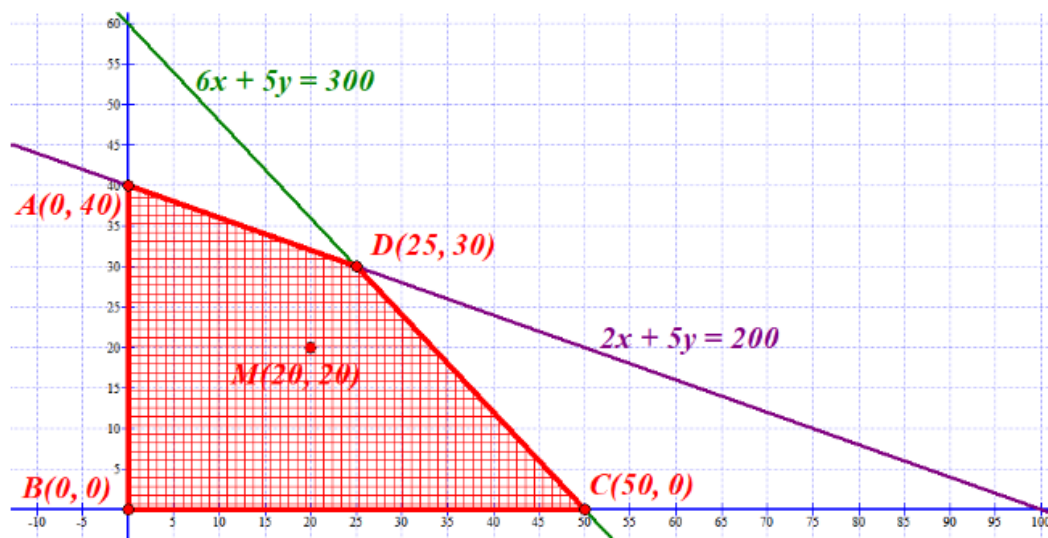
Dibujamos las rectas asociadas y decidimos la región factible.



Probamos si el punto $M(20, 20)$ cumple las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 20 \geq 0 \\ 20 \geq 0 \\ 120 + 100 \leq 300 \\ 40 + 100 \leq 200 \end{array} \right\} \text{ Si se cumplen.}$$

La región factible es la limitada por los ejes y las dos rectas y que contiene el punto M .



Sustituimos las coordenadas de cada punto en la función Beneficio $B(x, y) = 1000x + 1500y$

$$A(0, 40) \rightarrow B(0, 40) = 0 + 60000 = 60000$$

$$B(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$C(50, 0) \rightarrow B(50, 0) = 50000 + 0 = 50000$$

$$D(25, 30) \rightarrow B(25, 30) = 25000 + 45000 = 70000$$

El beneficio máximo que se obtiene es de 70000 € reparando 25 motos y 30 coches.

2B- Halla razonadamente dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Llamemos x e y a los dos números reales que buscamos. Como su suma es 10 se cumple:

$$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x \text{ . Los números buscados son } x \text{ y } 10 - x.$$

Queremos que el producto de sus cuadrados sea máximo.

$$f(x) = x^2(10 - x)^2 = x^2(100 + x^2 - 20x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2$$

Calculamos su derivada y la igualamos a cero en busca de su valor máximo.

$$f(x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 60x^2 + 200x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 15x + 50) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 15x + 50 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{15 + 5}{2} = 10 \\ \frac{15 - 5}{2} = 5 \end{cases} \end{cases}$$

Sustituimos estos tres valores de x en la segunda derivada.

$$f'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 120x + 200$$

Para $x = 0 \rightarrow f''(0) = 200 > 0$. $x = 0$ es un mínimo local.

Para $x = 5 \rightarrow f''(5) = 12 \cdot 25 - 120 \cdot 5 + 200 = 300 - 600 + 200 = -100 < 0$. $x = 5$ es un máximo local.

Para $x = 10 \rightarrow f''(10) = 1200 - 1200 + 200 = 200 > 0$. $x = 10$ es un mínimo local.

Los dos números reales buscados son 5 y 5.

3B- Una granja cultiva perlas cuyos diámetros siguen una distribución normal con media μ mm y desviación típica $\sigma = 0,8$ mm. Se quiere comprobar el cumplimiento de las especificaciones exigidas por una joyería en la elaboración de sus collares. Para ello se elige una muestra representativa de 256 perlas, resultando un diámetro medio muestral de 9,92 mm.

a) Calcula el intervalo de confianza para el diámetro medio poblacional de las perlas con un nivel de confianza del 90 %.

b) Calcula el tamaño necesario de la muestra de perlas que permita alcanzar, con un nivel de confianza del 98%, un error máximo de 0.2 mm en la estimación del diámetro medio poblacional de una perla.

$X =$ Diámetro de una perla.

Sabemos que $X = N(\mu, 0,8)$

a) Para establecer el intervalo de confianza utilizamos la fórmula $(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error)$,

siendo $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$n = 256, \bar{x} = 9,92$ mm, $\sigma = 0,8$ mm

Como el nivel de confianza es del 90%

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$$

$$\text{El error sería } E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{256}} = 1,645 \cdot \frac{0,8}{16} = 0,08225$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (9,92 - 0,08225, 9,92 + 0,08225) =$$

$$\boxed{\text{Intervalo de confianza} = (9,83775, 10,00225)}$$

b) Como $1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 0,02 \rightarrow \alpha/2 = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,325$

Un error máximo de 0,2 mm lo sustituimos en la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,2 \Rightarrow 2,325 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{n}} = 0,2 \Rightarrow 2,325 \cdot \frac{0,8}{0,2} = \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(2,325 \cdot \frac{0,8}{0,2} \right)^2 = 86,49$$

El tamaño mínimo es de 87 perlas.

4B- El 48% de los trabajadores de una empresa son hombres. Si en esa empresa, el 82% de los hombres y el 75% de las mujeres están satisfechos con su trabajo, ¿qué porcentaje de trabajadores está satisfecho con su trabajo en esa empresa?

UNA FORMA DE HACERLO

Un simple cálculo de porcentajes.

HOMBRES → 48% son hombres, de ellos el 82% están satisfechos con su trabajo, es decir, el 82% del 48% de los trabajadores están satisfechos.

$$\frac{48}{100} \cdot \frac{82}{100} = \frac{3936}{10000}$$

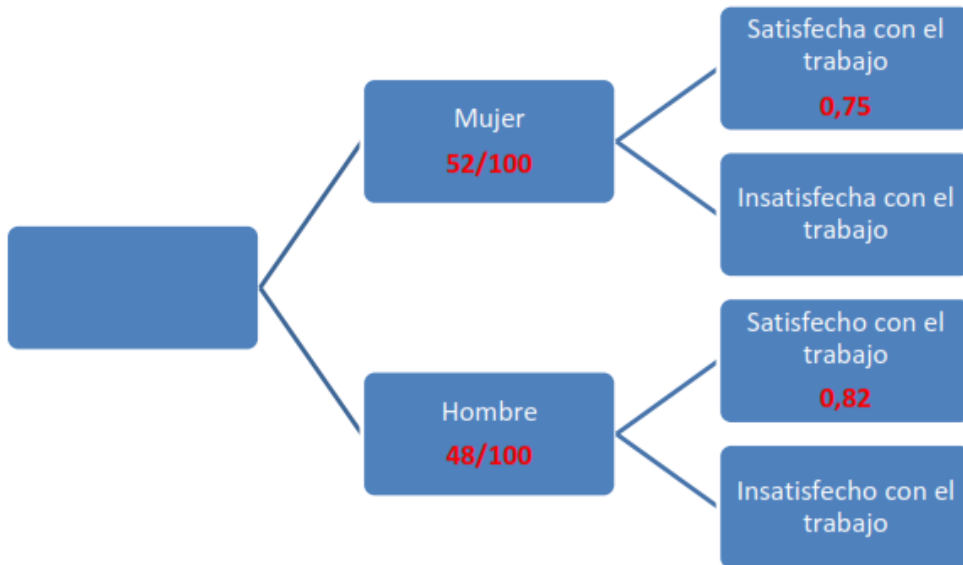
MUJERES → 52% son mujeres, de ellas el 75% están satisfechos con su trabajo, es decir, el 75% del 52% de los trabajadores están satisfechos.

$$\frac{52}{100} \cdot \frac{75}{100} = \frac{3900}{10000}$$

Si sumamos estas cifras tenemos $\frac{3936}{10000} + \frac{3900}{10000} = \frac{7836}{10000} = 0,7836 = \boxed{78,36\%}$

OTRA FORMA DE HACERLO

Realicemos un diagrama de árbol.



Con este esquema la probabilidad de que al elegir un trabajador esté satisfecho es:

$$P(\text{Elegir un trabajador y que esté satisfecho}) = \frac{52}{100} \cdot 0,75 + \frac{48}{100} \cdot 0,82 = 0,7836$$

Lo cual significa que el porcentaje de trabajadores satisfechos es del 78,36%