Septiembre 2015

OPCIÓN A

1. Calcula todos los valores, si existen, de los parámetros reales a y b que hacen que $A\,X - X\,A = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & b \end{pmatrix}$.

Solución:

Calculemos los productos $A\,X$ y $X\,A$:

$$A\,X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+6 & -2-2b \\ 3a-21 & 6+7b \end{pmatrix}$$

$$X\,A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+6 & -2a+14 \\ 3+3b & 6+7b \end{pmatrix}$$

Calculemos su diferencia:

$$A\,X - X\,A = \begin{pmatrix} -a+6 & -2-2b \\ 3a-21 & 6+7b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a+6 & -2a+14 \\ 3+3b & 6+7b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2a-2b-16 \\ 3a-3b-24 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se cumple que $A\,X - X\,A = 0$, igualemos la matriz obtenida a la matriz nula:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2a-2b-16 \\ 3a-3b-24 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas matrices se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2a-2b-16=0 \\ 3a-3b-24=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=8 \\ a-b=8 \end{cases} \Rightarrow a-b=8$$

Por tanto, los valores de a y b que hacen $A\,X - X\,A = 0$, son infinitos, pues se obtiene un sistema compatible indeterminado. Estos valores son $a \in \mathbb{R}$ y $b = a - 8$.

2. El propietario de un cine llena diariamente las 100 butacas de la sala, cobrando 4 euros por cada entrada. El dueño tiene la experiencia de que por cada euro que aumente el precio de la entrada acuden 10 espectadores menos.

a) Halla la expresión de la función de los ingresos diarios del cine dependiendo del aumento del precio de la entrada.

b) Determina el precio de la entrada para que los ingresos diarios del propietario sean máximos. ¿Cuántos espectadores acudirán al cine en ese momento? ¿Cuáles serán los ingresos diarios que obtendrá el propietario con ese precio?

Solución:

a) Llamemos x al número de euros que el propietario aumenta el precio de cada entrada. Los ingresos vendrán dados por el producto del precio de cada entrada y el número de espectadores que asisten. Estos se pueden expresar en función de x como:

Precio de la entrada: $4 + x$

Número de espectadores que acuden: $100 - 10x$

Por tanto, los ingresos, $I(x)$, vendrán dados por la función:

$$I(x) = (4 + x) \cdot (100 - 10x) = -10x^2 + 60x + 400 \qquad (x \geq 0)$$

b) Calculemos el precio de la entrada para que los ingresos diarios del propietario sean máximos, utilizando la derivada.

$$I'(x) = -20x + 60$$

Igualamos dicha derivada a cero para calcular los puntos singulares:

$$I'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -20x + 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Probemos a través de la derivada segunda que se trata de un máximo:

$$I''(x) = -20 \quad \Rightarrow \quad I''(3) = -20 < 0 \;\Rightarrow\; \text{Máximo}$$

Por tanto, el precio de la entrada para que los ingresos diarios del propietario sean máximos ha de ser de 7 euros.

Con este precio, el número de espectadores que acudirán al cine será de:

Número de espectadores que acuden $(100 - 10x) = 70$

Los ingresos máximos que obtendrá el propietario vendrán dados por $I(3)$:

$$I(3) = -10 \cdot 3^2 + 60 \cdot 3 + 400 = 490 \text{ euros}$$

3. La temperatura corporal es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 36,7 ºC y desviación típica 3,8 ºC. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 personas.

a) Calcula la probabilidad de que la temperatura corporal media de la muestra sea menor que 36,9 ºC.

b) Calcula la probabilidad de que la temperatura corporal media de la muestra esté comprendida entre 36,5 ºC y 37,3 ºC.

Solución:

a) La temperatura corporal media de la muestra, $\overline{X}$, sigue una distribución:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(36,7; \frac{3,8}{\sqrt{100}}\right) = N(36,7; 0,38)$$

Nos piden la probabilidad $P(\overline{X} < 36,9)$. Por tanto:

$$P(\overline{X} < 36,9) = P\left(Z < \frac{36,9-36,7}{0,38}\right) \approx P(Z < 0,53) = 0,7019$$

b) Ahora nos piden la probabilidad $P(36,5 \leq \overline{X} \leq 37,3)$:

$$P(36,5 \leq \overline{X} \leq 37,3) = P\left(\frac{36,5-36,7}{0,38} \leq Z \leq \frac{37,3-36,7}{0,38}\right) \approx P(-0,53 \leq Z \leq 1,58) =$$

$$= P(Z \leq 1,58) - P(Z \leq -0,53) = P(Z \leq 1,58) - (1 - P(Z \leq 0,53)) =$$

$$= 0,9429 - (1 - 0,7019) = 0,6448$$

4. El 60 % de los clientes de una panadería compran pan y el 30 % no compran ni pan ni bollería. ¿Qué porcentaje de clientes compran bollería y no compran pan?

Solución:

Consideremos los siguientes sucesos:

A: "El cliente compra pan"
B: "El cliente compra bollería"

El suceso no comprar pan ni bollería vendrá dado por $\overline{A} \cap \overline{B}$. Por tanto, las probabilidades dadas son:

$$P(A) = 0,6 \quad \text{y} \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,3$$

El porcentaje que nos piden lo podemos calcula a través de la probabilidad del suceso comprar bollería y no compran pan, es decir $P(\overline{A} \cap B)$:

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Con los datos que nos dan, si aplicamos una de las leyes de De Morgan, tenemos que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

Por tanto, $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Por otra parte, sabemos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

De aquí se deduce que:

$$P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A) = 0{,}7 - 0{,}6 = 0{,}1$$

Por tanto, la probabilidad de que un cliente compre bollería y no compre pan es:

$$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}1$$

Así pues, el porcentaje de clientes que compran bollería y no compran pan es del 10 %.

OPCIÓN B

1. Un heladero artesano elabora dos tipos de helados A y B que vende cada día. Los helados tipo A llevan 1 gramo de nata y los helados tipo B llevan 2 gramos de chocolate. Se dispone de 200 gramos de nata, 400 gramos de chocolate y le da tiempo a elaborar como máximo 350 helados diariamente. Por cada helado tipo A obtiene un beneficio de 1,5 euros y por cada helado tipo B el beneficio es de 1 euro. Utilizando técnicas de programación lineal, determina las unidades de cada tipo de helado que debe elaborar diariamente para que su beneficio sea máximo y calcula dicho beneficio.

Solución:

Sean x e y el número de helados del tipo A y del tipo B respectivamente. A partir del enunciado del problema podemos establecer las siguientes condiciones:

- Cantidad de nata disponible (200 g):

$$x \leq 200$$

- Cantidad de chocolate disponible (400 g):

$$2y \leq 400 \quad \Rightarrow \quad y \leq 200$$

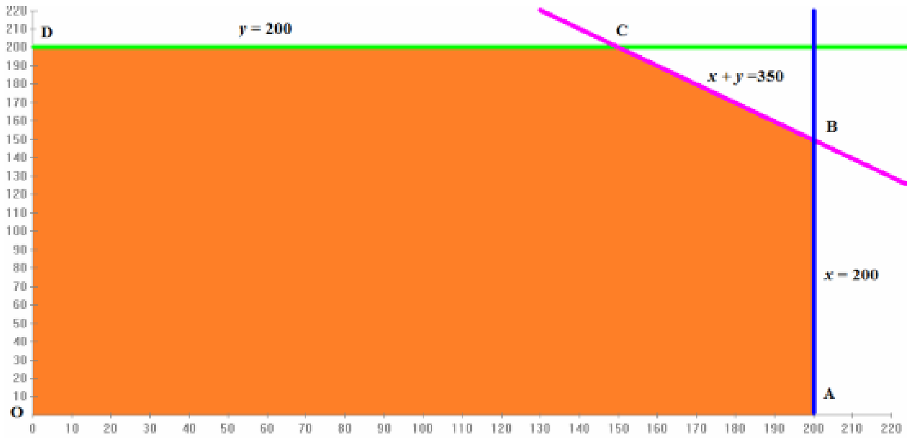
- Número máximo de helados que puede elaborar diariamente (350)

$$x + y \leq 350$$

Además, por la propia definición de las variables x e y se ha de cumplir que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

La función a maximizar, que nos da el beneficio obtenido es: $F(x, y) = 1{,}5x + y$

Dibujemos la región factible:



Los vértices de esta región son los puntos:

O (0, 0) A (200, 0) B (200, 150) C (150, 200) D (0, 200)

El máximo de la función objetivo se presentará en uno de estos puntos. Veamos en cual:

$$F(0, 0) = 1{,}5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$
$$F(200, 0) = 1{,}5 \cdot 200 + 1 \cdot 0 = 300$$
$$F(200, 150) = 1{,}5 \cdot 200 + 1 \cdot 150 = 450$$
$$F(150, 200) = 1{,}5 \cdot 150 + 1 \cdot 200 = 425$$
$$F(0, 200) = 1{,}5 \cdot 0 + 1 \cdot 200 = 200$$

Por tanto el beneficio máximo es de 450 euros y lo consigue elaborando 200 helados del tipo A y 150 helados del tipo B.

2. Dada la función $f(x) = -x^3 + 1$.
   a) Estudia su crecimiento y decrecimiento, y calcula sus puntos de inflexión.
   b) Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$.
   c) Representa gráficamente la función $f(x)$.

Solución:

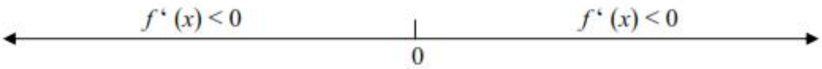
b) Tengamos en cuenta en primer lugar que el dominio de la función f es todo $\mathbb{R}$, pues se trata de una función polinómica. Para estudiar su monotonía estudiemos su derivada f':

$$f'(x) = -3x^2$$

Los puntos singulares son las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ (raíz doble)}$$

Representemos sobre una recta el punto singular obtenido y veamos qué signo toma la derivada primera en cada uno de los intervalos en que queda divida la misma:



Por tanto, la función $f(x)$ es siempre decreciente, pues su derivada, $f'(x)$, es siempre negativa (salvo en $x = 0$).

Para estudiar los puntos de inflexión, calculemos la derivada segunda, f'':

$$f''(x) = -6x$$

Los puntos de inflexión de la función $f(x)$ se pueden presentar en los valores que son solución de la ecuación $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -6x \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Para saber si hay un punto de inflexión en $x = 0$, estudiemos la curvatura de la función. Para ello, representemos sobre una recta dicho punto y estudiemos el signo que toma la derivada segunda en cada uno de los intervalos en que queda divida la misma:

$$\begin{array}{ccc} f''(x) > 0 & \quad | \quad & f''(x) < 0 \\ & 0 & \end{array}$$

Así, la función f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, +\infty)$. Por tanto, como en $x = 0$ cambia la curvatura, este es un punto de inflexión.

Punto de inflexión $(0, 1)$

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 1$ viene dada por:

$$y - f(1) = f'(1)\,(x - 1)$$

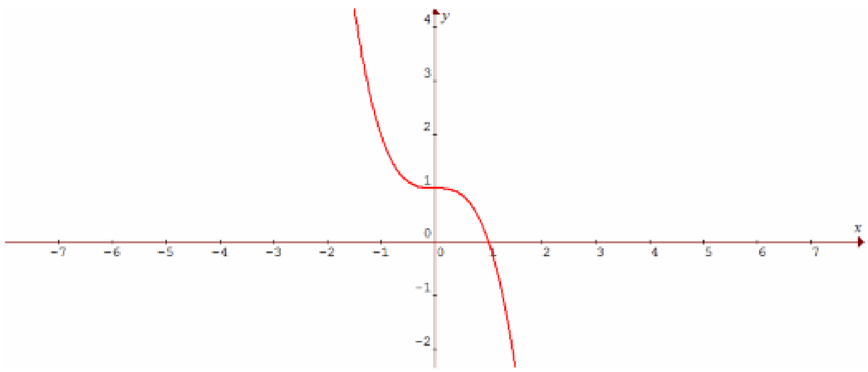
Si $x = 1$, tenemos que:

$$f(1) = -1^3 + 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad f'(1) = -3 \cdot 1^2 = -3$$

Entonces, la ecuación de la recta tangente pedida es:

$$y - 0 = (-3)(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -3x + 3 \quad \Rightarrow \quad 3x + y - 3 = 0$$

c) Con los datos obtenidos anteriormente podemos dibujar la gráfica de f:



3. En el año 2014, el estudio *B2C-2014 sobre Comercio Electrónico* aseguraba que el 12,5 % de los compradores *on-line* fueron nuevos compradores. El importe gastado *on-line* variaba según el tipo de comprador: el 26,8 % de los nuevos compradores gastaban menos de 50 euros, mientras que sólo el 12 % de los antiguos compradores gastaban menos de esa cantidad. Se elige un comprador *on-line* al azar.

   a) Calcula la probabilidad de que gastara menos de 50 euros en las compras *on-line*.

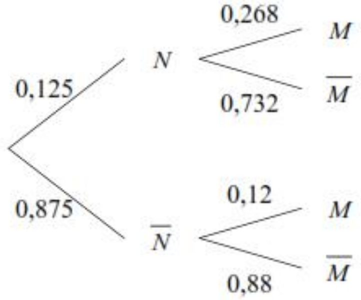
   b) Si el comprador *on-line* gastó menos de 50 euros, ¿cuál es la probabilidad de que fuera nuevo comprador?

Solución:

En primer lugar, consideremos los siguientes sucesos:

N: "ser un nuevo comprador *on-line*"
M: "gastarse menos de 50 euros en las compras *on-line*"

Para resolver los dos apartados del ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol:



a) La probabilidad de que el comprador elegido al azar gastara menos de 50 euros en las compras *on-line* viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P(M) = P(N) \cdot P(M/N) + P(\overline{N}) \cdot P(M/\overline{N}) =$$

$$= 0{,}125 \cdot 0{,}268 + 0{,}875 \cdot 0{,}12 = 0{,}0335 + 0{,}105 = 0{,}1385$$

b) La probabilidad de que un comprador *on-line*, que gastó menos de 50 euros, sea nuevo viene dada por (teorema de Bayes):

$$P(N/M) = \frac{P(N) \cdot P(M/N)}{P(M)} = \frac{P(N \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}125 \cdot 0{,}268}{0{,}1385} = \frac{0{,}0335}{0{,}1385} = 0{,}2419$$

4. Calcula el valor de $P(B)$ sabiendo que los sucesos A y B son independientes y que $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ y $P(A) = \frac{1}{4}$.

Solución:

En primer lugar, tengamos en cuenta que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Por otra parte, como los sucesos A y B son independientes, se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sustituyendo esta segunda expresión en la primera, se tiene que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

Despejando $P(B)$ tenemos:

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{5}{8} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$