Septiembre 2014

OPCIÓN A

1. A una persona le tocan 10000 euros en la lotería de Navidad y le aconsejan que los invierta es dos tipos de acciones de la Bolsa, *A* y *B*. Las de tipo *A* tienen más riesgo pero producen un beneficio anual del 10 % del capital invertido en ellas. Las de tipo *B* son más seguras, pero producen sólo un beneficio del 7 % anual del capital invertido en ellas. Tras varias deliberaciones decide invertir como mucho 6000 euros en la compra de acciones de cada tipo. Además, decide invertir en acciones de tipo *A* al menos la misma cantidad que en acciones de tipo *B*. Utiliza técnicas de programación lineal para hallar la cantidad que debe invertir en cada tipo de acción para que el beneficio anual sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Solución:

Sean x e y las cantidades, en euros, que invierte en las acciones de tipo *A* y de tipo *B* respectivamente. A partir del enunciado del problema podemos establecer las siguientes condiciones:

- Dinero a invertir:

$$x + y \leq 10000$$

- Inversión máxima (y mínima) en cada tipo de acciones:

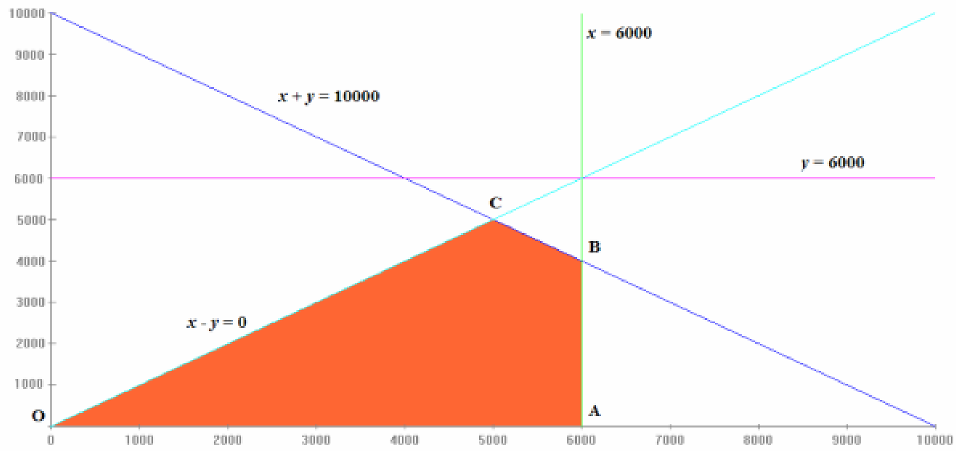
$$0 \leq x \leq 6000$$
$$0 \leq y \leq 6000$$

- Inversión de al menos la misma cantidad en acciones de tipo *A* que de tipo *B*:

$$x \geq y$$

La función a maximizar, que nos da el beneficio obtenido por el inversor es: $F(x, y) = 0{,}1x + 0{,}07y$

Dibujemos la región factible:



Los vértices de esta región son los puntos:

O (0, 0) A (6000, 0) B (6000, 4000) C (5000, 5000)

El máximo de la función objetivo se presentará en uno de estos puntos. Veamos en cual:

$$F(0, 0) = 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}07 \cdot 0 = 0$$
$$F(6000, 0) = 0{,}1 \cdot 6000 + 0{,}07 \cdot 0 = 600$$
$$F(6000, 4000) = 0{,}1 \cdot 6000 + 0{,}07 \cdot 4000 = 880$$
$$F(5000, 5000) = 0{,}1 \cdot 5000 + 0{,}07 \cdot 5000 = 850$$

Por tanto el beneficio máximo es de 880 euros y lo consigue invirtiendo 6000 euros en acciones de tipo A y 4000 euros en acciones de tipo B.

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}+1 & \text{si} \quad x<0 \\ x^3 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ 3x+2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

   a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x)$ en todos sus puntos.
   b) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = -1$.
   c) Representa gráficamente la función $f(x)$.

Solución:

a) Las tres funciones de que consta la función f son continuas y derivables en los trozos donde están definidas (la primera únicamente no está definida para $x = 0$, pero este punto no cumple que $x < 0$, que es donde se define esa parte, y las otras dos son polinómicas y por tanto continuas y derivables siempre). Por tanto, la función f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ salvo quizás en los puntos donde se cambia de un trozo a otro. Veamos qué ocurre en ellos.

- En $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}+1\right) = -\infty \qquad ; \qquad f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3 = 0$$

  Como los límites laterales son distintos no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y por tanto f no es continua en $x = 0$. En dicho punto la función presenta una discontinuidad de salto infinito. Como no es continua en este punto tampoco es derivable en él.

- En $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^3 = 8 \qquad ; \qquad f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(3x+2) = 8$$

  En $x = 2$ la función es continua. Veamos si es derivable. La derivada de la función f, salvo quizá en el punto $x = 2$ que estamos estudiando es:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Entonces:

$$f'(2^-) = 3 \cdot 2^2 = 12 \qquad ; \qquad f'(2^+) = 3$$

Por tanto, la función no es derivable en $x = 2$, y la expresión de $f'(x)$ es la que hemos escrito anteriormente.

Resumiendo, f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = -1$ viene dada por:

$$y - f(-1) = f'(-1)\,(x - (-1)) \quad \Rightarrow \quad y - f(-1) = f'(-1)\,(x + 1)$$

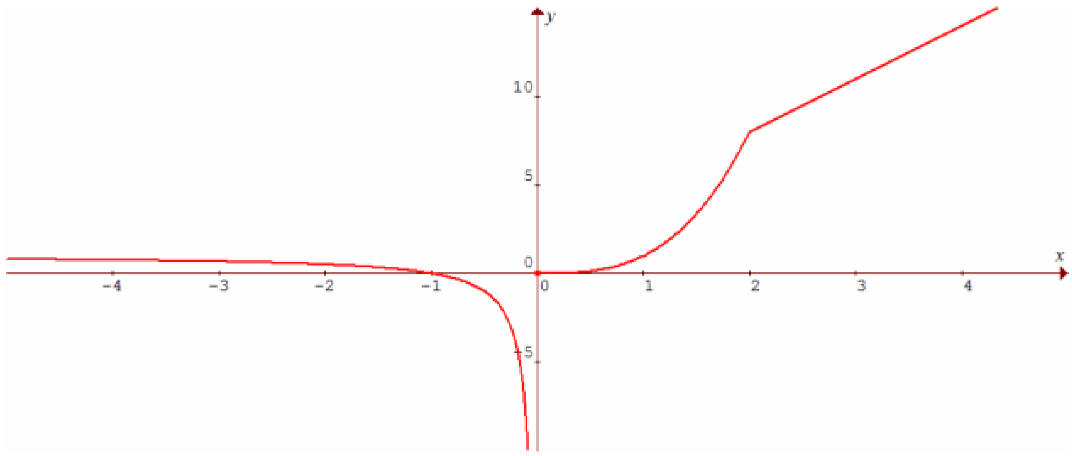
Si $x = -1$, tenemos que:

$$f(-1) = \frac{1}{-1} + 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad f'(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} = -1$$

Entonces, la ecuación de la recta tangente pedida es:

$$y - 0 = (-1)(x + 1) \quad \Rightarrow \quad y = -x - 1 \quad \Rightarrow \quad x + y + 1 = 0$$

c) La representación gráfica de la función viene dada por (el primer trozo es parte de una hipérbola, el segundo es parte de una parábola cúbica y el tercero es una semirrecta):



3. El 30 % de los habitantes de una localidad son jubilados y el 20 % son estudiantes, mientras que el resto ni están jubilados ni son estudiantes. El 80 % de los jubilados, así como el 20 % de los estudiantes y el 40 % del resto de habitantes, son socios del club de fútbol local.

a) Elegido al azar un habitante de esa localidad, calcula la probabilidad de que sea socio del club de fútbol.

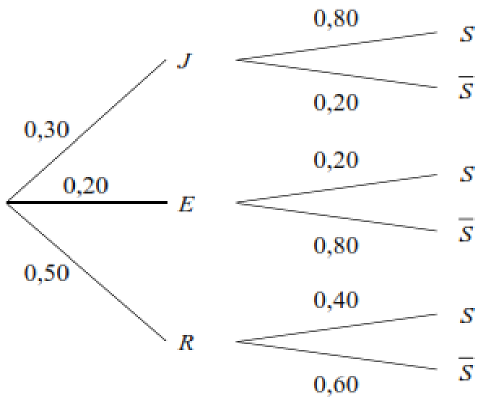
b) Elegido al azar un socio del club de fútbol, calcula la probabilidad de que sea jubilado.

Solución:

En primer lugar, consideremos los siguientes sucesos:

J: "ser jubilado"
E: "ser estudiante"
R: "ser un habitante que ni está jubilado ni es estudiante"
S: "ser socio del club de fútbol local"

Para resolver los dos apartados del ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol:



a) La probabilidad de que un habitante de esa localidad elegido al azar sea socio del club de fútbol local viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P(S) = P(J)\cdot P(S/J) + P(E)\cdot P(S/E) + P(R)\cdot P(S/R) =$$
$$= 0{,}30\cdot 0{,}80 + 0{,}20\cdot 0{,}20 + 0{,}50\cdot 0{,}40 = 0{,}48$$

b) La probabilidad de que un habitante elegido al azar sea jubilado, sabiendo que es socio del club de fútbol local, viene dada por (teorema de Bayes):

$$P(J/S) = \frac{P(J)\cdot P(S/J)}{P(S)} = \frac{P(J\cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}30\cdot 0{,}80}{0{,}48} = 0{,}5$$

4. Calcula $P(A\cup B)$ sabiendo que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(B/A) = 0{,}3$.

Solución:

Tengamos en cuenta que:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

En esta expresión nos falta por conocer $P(A\cap B)$, pero lo podemos calcular fácilmente ya que:

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad\Rightarrow\quad P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B/A) = 0{,}4\cdot 0{,}3 = 0{,}12$$

Entonces:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}12 = 0{,}78$$

OPCIÓN B

1. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & t & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Determina los valores de t para los que existe la matriz inversa de A.
   b) Calcula la matriz inversa para $t = 2$.

Solución:

a) La matriz A no tendrá inversa para aquellos valores de t que anulen el determinante de la misma.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & t & 2 \end{vmatrix} = 2 - t - t^2$$

Veamos qué valores de t anulan este determinante:

$$|A| = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - t - t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -2 \;\text{ y }\; t = 1$$

Por tanto la matriz A no tendrá inversa para los valores $t = -2$ y $t = 1$.

b) Para $t = 2$, la matriz A^{-1} existe, por ser $|A| = -4 \neq 0$, y vendrá dada por:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

siendo $Adj\,(A^t)$ la matriz adjunta de la transpuesta de A. Calculémosla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Adj\,(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2. El saldo de una cuenta bancaria en un periodo de 5 años viene dado por la función $f(t) = -12t^3 + 90t^2 - 144t + 84$, $0 \le t \le 5$ siendo t el tiempo en años.

a) Calcula los saldos inicial y final.
b) ¿En qué momento el saldo de la cuenta es máximo? ¿Y cuándo es mínimo?
c) Analiza si en algún momento el saldo es negativo y determina todos los periodos donde se observa un crecimiento de saldo.

Solución:

a) Los saldos inicial y final vendrán dados por $f(0)$ y $f(5)$ respectivamente. Calculémoslos:

$$f(0) = -12 \cdot 0^3 + 90 \cdot 0^2 - 144 \cdot 0 + 84 = 84$$

$$f(5) = -12 \cdot 5^3 + 90 \cdot 5^2 - 144 \cdot 5 + 84 = 114$$

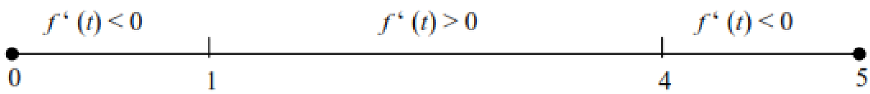
b) Calculemos el máximo y el mínimo de la función f para saber cuándo el saldo en la cuenta es máximo o mínimo. Para ello derivemos f:

$$f'(t) = -36t^2 + 180t - 144$$

Los puntos singulares son las raíces de la ecuación $f'(t) = 0$:

$$f'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -36t^2 + 180t - 144 = 0 \quad \Rightarrow \quad -t^2 + 5t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \text{y} \quad t = 4$$

Para estudiar qué tipo de puntos singulares tenemos, tengamos en cuenta que la función f está definida para $t \in [0, 5]$. Representándolos sobre una recta, veamos qué signo toma la derivada primera en cada uno de los intervalos en que queda divida la misma:



Por tanto, como $f(t)$ decrece a la izquierda y crece a la derecha de $t = 1$, en este punto se presenta un mínimo relativo del saldo en cuenta, que también es el mínimo absoluto, por ser $f(1) = 18$ menor que el valor que la función toma en los momentos inicial y final. Por otro lado, como $f(t)$ crece a la izquierda y decrece a la derecha de $t = 4$, en este punto se presenta el máximo relativo del saldo en cuenta, que también es el máximo absoluto, por ser $f(4) = 180$ mayor que el valor que la función toma en los momentos inicial y final.

c) El saldo no puede ser negativo pues su mínimo absoluto se encuentra para $t = 1$, y su valor es 18. El periodo en el que se observa un crecimiento del saldo, como se desprende del apartado anterior es entre el primer y el cuarto año.

3. Se sabe que el tiempo que una persona dedica a ver la televisión cada día sigue una distribución normal con media μ minutos y desviación típica σ = 20 minutos. Un estudio desea comprobar si el tiempo medio diario por persona viendo la televisión es de 3 horas. Para ello se entrevista a una muestra representativa de 225 televidentes, resultando un tiempo medio muestral de 188 minutos.
   a) Plantea un test de hipótesis que permita decidir si el tiempo medio es de 3 horas con una confianza del 95 %.
   b) Proporciona un intervalo de confianza al 99 % para el tiempo medio μ dedicado a ver la televisión.

Solución:

a) Hay que hacer un contraste de hipótesis para la media. Haremos un contrate bilateral:

Hipótesis nula, H_0: μ = 180 minutos (3 horas)
Hipótesis alternativa, H_1: μ ≠ 180 minutos (3 horas)

El nivel de confianza es del 95 % y por tanto el nivel de significación, α, es del 5 %. Para este nivel de significación, el valor crítico es $z_{\alpha/2}$ = 1,96.

Si tomamos como estadístico de contraste la media muestral, $\overline{X}$, esta seguirá una distribución normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(180, \frac{20}{\sqrt{225}}\right) = N(180; 4/3)$. Aceptaremos la hipótesis nula si, al tipificar el valor de $\overline{X}$ observado en la muestra, $\overline{x}$ = 188 minutos, este pertenece al intervalo $(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$. En caso contrario rechazamos la hipótesis nula, esto es, aceptamos la hipótesis alternativa.

$$z = \frac{\overline{x}-\mu}{\sigma} = \frac{188-180}{4/3} = 6 \notin (-1{,}96;\ 1{,}96)$$

Por tanto, con un nivel de significación del 5 %, se rechaza la hipótesis nula de que el tiempo medio diario por persona viendo la televisión es de 3 horas, y por tanto, se acepta la hipótesis alternativa, es decir, el tiempo medio diario por persona viendo la televisión no es de 180 minutos, 3 horas.

b) El intervalo de confianza pedido será de la forma $\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, en el que para una confianza del 99 % le corresponde un valor crítico $z_{\alpha/2}$ = 2,58. Así pues:

$$I = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (188 - 2{,}58\cdot\frac{20}{\sqrt{225}},\ 188 + 2{,}58\cdot\frac{20}{\sqrt{225}}) = (184{,}56;\ 191{,}44)$$

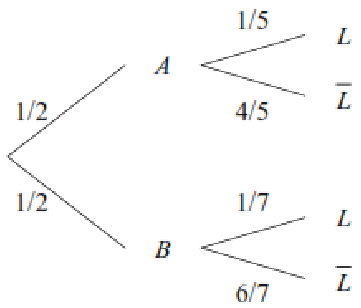
4. Tenemos dos llaves de un trastero, cada una en un llavero. Si elegimos una llave al azar de uno de los llaveros, ¿cuál es la probabilidad de que abra el trastero, sabiendo que uno de los llaveros tiene 5 llaves y el otro 7 llaves?

Solución:

En primer lugar, consideremos los siguientes sucesos:

> A: "elegir el llavero con cinco llaves"
> B: "elegir el llavero con siete llaves"
> L: "elegir una llave que abre el trastero"

Para resolver los dos apartados del ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol:



La probabilidad de que una llave elegida al azar de uno de los llaveros abra el trastero viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P(L) = P(A) \cdot P(L/A) + P(B) \cdot P(L/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{1}{14} = \frac{12}{70} = \frac{6}{35} \approx 0{,}1714$$