Septiembre 2013

OPCIÓN A

1. Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y-z=25 \\ 2x-y+10z=50 \\ 3z+ay-4z=10 \end{cases}$$

   a) Clasifica este sistema en función de sus posibles soluciones para los distintos valores del parámetro a.
   b) Resuelve el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) Consideremos la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada $\overline{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & a & -4 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 25 \\ 2 & -1 & 10 & 50 \\ 3 & a & -4 & 10 \end{array}\right)$$

Estudiemos los rangos de estas matrices. Se tiene que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & a & -4 \end{vmatrix} = 4 - 2a + 30 - 3 - 10a + 8 = -12a + 39$$

Dicho determinante se anula para $a = \dfrac{39}{12} = \dfrac{13}{4}$. Por tanto:

- Si $a \neq \dfrac{13}{4} \Rightarrow$ rango A = rango $\overline{A}$ = 3 = nº incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$ Solución única.

- Si $a = \dfrac{13}{4} \Rightarrow$ rango A = 2, ya que podemos encontrar un menor de orden dos no nulo en ella, por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$. Además, orlando dicho menor con los elementos de la última fila y la columna de los términos independientes, se tiene que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 25 \\ 2 & -1 & 50 \\ 3 & 13/4 & 10 \end{vmatrix} = 195 \neq 0$ y por tanto rango $\overline{A} = 3 \Rightarrow$ S.I. $\Rightarrow$ Sin soluciones.

b) Vamos a resolverlo para el caso $a = 0$, para el cual el sistema es compatible determinado, utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 25 \\ 2 & -1 & 10 & 50 \\ 3 & 0 & -4 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 3f_1]{f_2 \to f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 25 \\ 0 & -3 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -65 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to f_3 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 25 \\ 0 & -3 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -65 \end{array}\right)$$

Despejando z de la última ecuación se obtiene que $z = 5$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación, se llega a que $y = 20$. Finalmente, sustituyendo los valores de y y z obtenidos en la primera ecuación, se llega a que $x = 10$.

Otra forma de obtener la solución para $a = 0$ es mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 1 & -1 \\ 50 & -1 & 10 \\ 10 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{390}{39} = 10 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 25 & -1 \\ 2 & 50 & 10 \\ 3 & 10 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{780}{39} = 20 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 25 \\ 2 & -1 & 50 \\ 3 & 0 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{195}{39} = 5$$

2. Una persona amante de las matemáticas desea donar sus 3600 libros a dos bibliotecas A y B. En las instrucciones de donación, deja fijado que los lotes de libros se hagan de modo que el producto del número de libros destinados a la biblioteca A por el cubo del número de libros destinados a la biblioteca B sea máximo. Determina la cantidad de libros recibida por cada biblioteca.

Solución:

Nos enfrentamos a un problema de optimización. Consideremos las siguientes variables:

x: "número de libros destinados a la biblioteca A".
y: "número de libros destinados a la biblioteca B".

Como en las instrucciones de donación, se deja fijado que los lotes de libros se hagan de modo que el producto del número de libros destinados a la biblioteca A por el cubo del número de libros destinados a la biblioteca B sea máximo, tenemos que la función f a maximizar es:

$$f(x, y) = x \cdot y^3$$

Por otra parte como el número de libros donados son 3600, se tiene que las dos variables están relacionadas de modo que:

$$x + y = 3600 \quad \Rightarrow \quad x = 3600 - y \quad (*)$$

Sustituyendo esta relación en la función tenemos que:

$$f(y) = (3600 - y) \cdot y^3 = 3600y^3 - y^4$$

Calculemos el máximo de la misma.

$$f'(y) = 10800y^2 - 4y^3$$

Los puntos singulares son las raíces de la ecuación $f'(y) = 0$:

$$f'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 10800y^2 - 4y^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2\,(10800 - 4y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ (doble)} \quad \text{e} \quad y = 2700$$

Para estudiar qué tipo de puntos singulares tenemos, tengamos en cuenta que $y \in [0, 3600]$ y representándolos sobre una recta, veamos qué signo toma la derivada primera en cada uno de los intervalos en que queda divida la misma:

Por tanto, como $f(y)$ crece a la izquierda y decrece a la derecha de $y = 2700$, en este punto se presenta un máximo (el máximo no está en los extremos del intervalo $[0, 3600]$ pues para esos valores $f(y)$ se anula). Por tanto el número de libros destinados a la biblioteca *A* será de 900 y el número de libros destinados a la biblioteca *B* será de 2700.

Nota: El problema también se podría resolver de modo análogo despejando de la expresión anterior marcada como (*) la variable y en lugar de la variable x y sustituyendo en la función $f(x, y)$ para obtener una función $f(x)$ dependiente de una sola variable, pero los cálculos serían más complicados y tediosos.

3. Los pesos de los sacos de leña que se venden en una gasolinera siguen una distribución normal con desviación típica 1 kg. Se quiere comprobar con una confianza del 95 % que el peso de 10 kg que marca la etiqueta de cada saco es correcto. Para ello se toman al azar 100 sacos de leña, resultando un peso medio de 9,75 kg.
   a) Plantea un test de hipótesis adecuado que permita hacer la comprobación requerida.
   b) Proporciona un intervalo de confianza al 90 % para el peso medio de los sacos.

Solución:

a) Hay que hacer un contraste de hipótesis para la media. Haremos un contrate bilateral:

Hipótesis nula, H_0: $\mu = 10$ kg
Hipótesis alternativa, H_1: $\mu \neq 10$ kg

El nivel de confianza es del 95 % y por tanto el nivel de significación, α, es del 5 %. Para este nivel de significación, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Si tomamos como estadístico de contraste la media muestral, $\overline{X}$, esta seguirá una distribución normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(10, \frac{1}{\sqrt{100}}\right) = N\,(10; 0{,}1)$. Aceptaremos la hipótesis nula si, al tipificar el valor de $\overline{X}$ observado en la muestra, $\overline{x} = 9{,}75$ kg, este pertenece al intervalo $(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$. En caso contrario rechazamos la hipótesis nula, esto es, aceptamos la hipótesis alternativa.

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma} = \frac{9{,}75 - 10}{0{,}1} = -2{,}5 \notin (-1{,}96;\ 1{,}96)$$

Por tanto, con un nivel de significación del 5 %, se rechaza la hipótesis nula de que el peso de los sacos indicado en la etiqueta es correcto, y por tanto, se acepta la hipótesis alternativa, es decir, el peso indicado no es correcto, no son 10 kg.

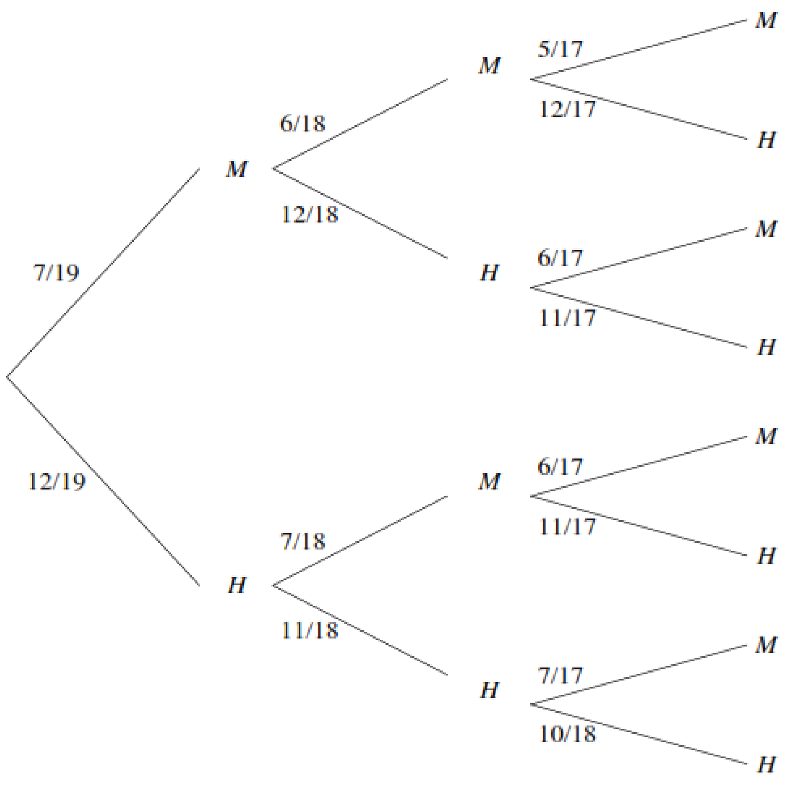
b) El intervalo de confianza pedido será de la forma $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, en el que para una confianza del 90 % le corresponde un valor crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}65$. Así pues:

$$I = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (9{,}75 - 1{,}65 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}}, 9{,}75 + 1{,}65 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}}) = (9{,}585; 9{,}915)$$

4. En una clase de inglés hay 7 mujeres y 12 hombres. Si se seleccionan 3 personas al azar, halla la probabilidad de que se seleccionen 2 mujeres y un hombre.

Solución:

Este problema se puede resolver utilizando el siguiente diagrama de árbol, en el cual elegimos a tres personas de manera consecutiva y sin devolución (*M* : "ser mujer"; *H*: "ser hombre"):



Si se escogen tres personas al azar, la probabilidad de que se seleccionen 2 mujeres y un hombre viene dada por tres caminos diferentes en el diagrama de árbol (teorema de la probabilidad total). Así, si sumamos las probabilidades de esas tres ramas obtenemos:

$$P\,(2M \text{ y } 1H) = P\,(M \cap M \cap H) + P\,(M \cap H \cap M) + P\,(H \cap M \cap M) =$$

$$= \frac{7}{19}\cdot\frac{6}{18}\cdot\frac{12}{17}+\frac{7}{19}\cdot\frac{12}{18}\cdot\frac{6}{17}+\frac{12}{19}\cdot\frac{7}{18}\cdot\frac{6}{17}=3\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{7}{18}\cdot\frac{6}{17} = \frac{84}{323} \approx 0{,}26$$

También se puede resolver este problema utilizando la combinatoria y la regla de Laplace. Dicha regla nos dice que la probabilidad de un suceso A viene dada por:

$$P\,(A) = \frac{\textit{Número de casos favorables}}{\textit{Número de casos posibles}}$$

En nuestro ejercicio, los *casos posibles*, que son los grupos de tres personas que se pueden formar con 7 mujeres y 12 hombres, vienen dados por las combinaciones sin repetición de 19 elementos en grupos de 3, C_{19}^{3}:

$$C_{19}^{3} = \binom{19}{3} = 969$$

Para calcular el número de *casos favorables*, observemos que los grupos de tres personas han de estar formados por 2 mujeres y un hombre. El número total de casos favorables vendrá dado por tanto por el producto:

$$C_7^2 \cdot C_{12}^1 = \binom{7}{2}\cdot\binom{12}{1} = 21 \cdot 12 = 252$$

Donde C_7^2 indica el número de grupos de dos mujeres que se pueden formar con las siete que hay, y C_{12}^1 indica el número de grupos de un hombre que se pueden formar con los doce que hay.

Por tanto, la probabilidad pedida viene dada por:

$$P\,(2M \text{ y } 1H) = \frac{C_7^2 \cdot C_{12}^1}{C_{19}^3} = \frac{252}{696} = \frac{84}{323} \approx 0{,}26$$

OPCIÓN B

1. Un trabajador autónomo se dedica a pintar edificios 300 días al año durante 8 horas cada día. Para organizarse mejor, adquiere al comienzo del año los dos tipos de pintura blanca que emplea: *A* y *B*. Cada tipo de pintura requiere un trabajo diferente: la pintura *A* necesita 6 horas de trabajo por kilo, mientras que la pintura *B* necesita 3 horas de trabajo por kilo. Además, el tamaño del envase es diferente, por lo que en su almacén caben cómo máximo 350 kilos de pintura tipo *A* y 500 kilos de pintura tipo *B*. Sabiendo que por cada kilo de pintura de tipo *A* obtiene un beneficio de 70 € y que por cada kilo de pintura de tipo *B* obtiene un beneficio de 80 €, utiliza técnicas de programación lineal para determinar cuánta pintura de cada tipo debe comprar al comienzo del año para maximizar su beneficio.

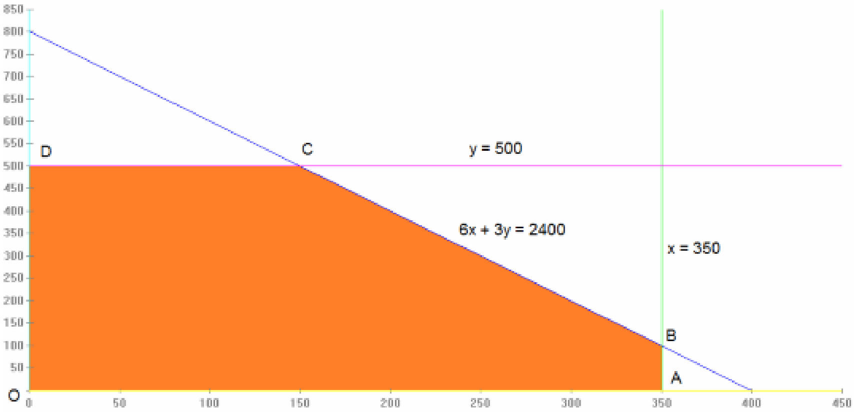
Solución:

Sean x e y las cantidades, en kilogramos, de pintura blanca de los tipos *A* y *B* que necesita el pintor. A partir del enunciado del problema podemos establecer las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{rl} \text{Horas de trabajo} \Rightarrow & 6x + 3y \leq 2400 \ \ (300 \text{ días} \cdot 8 \text{ horas/día} = 2400 \text{ horas}) \\ \text{Limitaciones de almacenaje} \Rightarrow & x \leq 350 \\ \text{Limitaciones de almacenaje} \Rightarrow & y \leq 500 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

La función a maximizar, que nos da el beneficio obtenido por el fabricante es: $F(x, y) = 70x + 80y$

Dibujemos la región factible:



Los vértices de esta región son los puntos:

O (0, 0) A (350, 0) B (350, 100) C (150, 500) D (0, 500)

El máximo de la función objetivo se presentará en uno de estos puntos. Veamos en cual:

$F(0, 0) = 70 \cdot 0 + 80 \cdot 0 = 0$
$F(350, 0) = 70 \cdot 350 + 80 \cdot 0 = 24500$
$F(350, 100) = 70 \cdot 350 + 80 \cdot 100 = 32500$
$F(150, 500) = 70 \cdot 150 + 80 \cdot 500 = 50500$
$F(0, 500) = 70 \cdot 0 + 80 \cdot 500 = 40000$

Por tanto el beneficio máximo es de 50500 euros y lo consigue comprando 150 kilos de pintura tipo *A* y 500 kilos de pintura tipo *B*.

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax+3+\dfrac{x}{x-2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$.

   a) Halla el valor de a para el que la pendiente m de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto (0, 3) es $m = 1$.

   b) Para $a = 1$, estudia la continuidad de la función y determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Se tiene que la pendiente, m, de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto x_0 coincide con el valor de la derivada de f en dicho punto x_0, esto es:

$$m = f'(x_0)$$

En el caso que nos ocupa $x_0 = 0$ y para $x \neq 2$ se tiene que $f'(x)$ viene dada por:

$$f'(x) = a - \frac{2}{(x-2)^2}$$

Así pues:

$$1 = m = f'(0) = a - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 = a - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{2}$$

b) Para $a = 1$ tenemos que $f(x) = \begin{cases} x+3+\dfrac{x}{x-2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$.

Comprobemos que f no es continua en $x = 2$. Tenemos que $f(2) = 0$, pero:

$$\lim_{x\to 2^+}\left(x+3+\frac{x}{x-2}\right) = 5+\frac{2}{0^+} = 5+\infty = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^-}\left(x+3+\frac{x}{x-2}\right) = 5+\frac{2}{0^-} = 5-\infty = -\infty$$

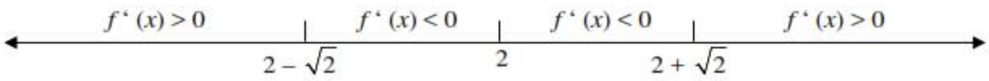
Como los límites laterales son distintos no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$ y por tanto f no es continua en $x = 2$. Para cualquier otro punto la función es continua por ser suma de funciones continuas en $\mathbb{R} - \{2\}$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, igualemos la derivada primera a cero para calcular los puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{2}{(x-2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{2}{(x-2)^2} \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 = 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{2}$$

Dibujemos estos puntos sobre una recta, además del punto donde la función no es continua, $x = 2$:



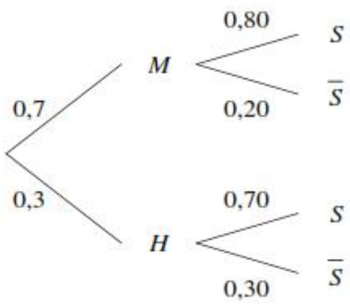
Por tanto, f crece en $(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$ y decrece en $(2 - \sqrt{2}, 2) \cup (2, 2 + \sqrt{2})$.

3. El 70 % de las compras de un supermercado las realizan mujeres. El 80 % de las compras realizadas por éstas supera los 20 €, mientras que sólo el 30 % de las realizadas por hombres supera esa cantidad.
   a) Elegido un ticket de compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 20 €?
   b) Si se sabe que un ticket de compra no supera los 20 €, ¿cuál es la probabilidad de que la compra la hiciera una mujer?

Solución:

Para resolver este ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol, considerando los sucesos:

M: "compra realizada por una mujer".
H: "compre realizada por un hombre".
S: "compra superior a 20 euros".
$\overline{S}$: "compra no superior a 20 euros".



a) Elegido un ticket de compra al azar, la probabilidad de que supere los 20 € viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P(S) = P(M) \cdot P(S/M) + P(H) \cdot P(S/H) = 0{,}70 \cdot 0{,}80 + 0{,}3 \cdot 0{,}70 = 0{,}77$$

b) Si se sabe que un ticket de compra no supera los 20 €, la probabilidad de que la compra la hiciera una mujer viene dada por (teorema de Bayes):

$$P(M/\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}/M) \cdot P(M)}{P(\overline{S})} = \frac{P(M \cap \overline{S})}{1 - P(S)} = \frac{0{,}70 \cdot 0{,}20}{1 - 0{,}77} = \frac{0{,}14}{0{,}33} = 0{,}4242$$

4. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución normal $N(50, 10)$. Calcula la probabilidad $P(X \geq 80)$.

Solución:

$$P(X \geq 80) = P\left(Z \geq \frac{80 - 50}{10}\right) = P(Z \geq 3) = 1 - P(Z < 3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$