Septiembre 2012

OPCIÓN A

1. En un aparcamiento hay 24 coches aparcados, de color blanco, rojo o gris. El número de coches grises es igual al doble del número de coches rojos.
   a) ¿Es posible saber, con estos datos, el número de coches blancos que hay aparcados? Razona tu respuesta.
   b) Si además se sabe que la mitad de coches son rojos o grises, ¿cuántos coches hay de cada color?

Solución:

Sean B, R y G el número de coches blancos, rojos o grises respectivamente. Con los datos del problemas obtenemos las siguientes ecuaciones:

- En el aparcamiento hay 24 coches $\Rightarrow$ $B + R + G = 24$
- El número de coches grises es igual al doble del número de coches rojos $\Rightarrow$ $G = 2R$

a) Con estos datos no es posible saber el número de coches blancos aparcados, pues se trata de un sistema con tres incógnitas y sólo dos ecuaciones. Es un sistema compatible pero indeterminado, como se puede comprobar fácilmente escribiendo las matrices de los coeficientes, A, y la matriz ampliada, $\overline{A}$, y estudiando sus rangos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Se comprueba sin dificultad que rango (A) = rango $(\overline{A}) = 2 < 3$ = nº de incógnitas.

b) Si además se sabe que la mitad de coches son rojos o grises, entonces podemos añadir al sistema anterior la siguiente ecuación:

$$R + G = 12$$

Con lo que obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Resolvámoslo aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} B + R + G = 24 \\ -2R + G = 0 \\ R + G = 12 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to 2f_3 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 24 \end{array}\right)$$

Volviendo a escribir este sistema con las incógnitas se obtiene que:

$$\begin{cases} B + R + G = 24 \\ -2R + G = 0 \\ 3G = 24 \end{cases}$$

Despejando G de la última ecuación obtenemos que $G = 8$. Sustituyendo en la segunda ecuación y despejando R, tenemos que $R = 4$. Finalmente sustituyendo ambos valores en la primera ecuación y despejando B, obtenemos $B = 12$. Por tanto hay 12 coches blancos, 4 rojos y 8 grises.

2. El rendimiento de una máquina, a lo largo de las 7 horas que permanece en funcionamiento cada día, viene dado por la función $f(x) = x^3 - 10{,}5x^2 + 30x$, donde $x \in (0, 7)$ indica el número de horas transcurridas desde que la máquina se pone en marcha.
   a) Determina en qué momento se produce el máximo y el mínimo rendimiento.
   b) Calcula el rendimiento de la máquina en esos dos momentos del día.

Solución:

a) Para conocer cuando se produce el máximo y el mínimo rendimiento, debemos estudiar la derivada primera:

$$f'(x) = 3x^2 - 21x + 30$$

Igualándola a cero para calcular los puntos singulares obtenemos que:

$$3x^2 - 21x + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ y } x = 5$$

Comprobemos qué tipo de puntos singulares son a través de la derivada segunda:

$$f''(x) = 6x - 21$$

Como:

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 21 = -9 < 0 \Rightarrow \text{ Máximo}$$

$$f''(5) = 6 \cdot 5 - 21 = 9 > 0 \Rightarrow \text{ Mínimo}$$

Por tanto el máximo rendimiento se produce a las dos horas y el mínimo a las 5 horas.

b) El valor de dichos rendimientos máximo y mínimo vienen dados por:

$$\text{Rendimiento máximo} = f(2) = 2^3 - 10{,}5 \cdot 2^2 + 30 \cdot 2 = 8 - 42 + 60 = 26$$

$$\text{Rendimiento mínimo} = f(5) = 5^3 - 10{,}5 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 = 125 - 262{,}5 + 150 = 12{,}5$$

3. Un envío de frutas a un supermercado consta de naranjas y manzanas que se agrupan en cajones de 500 piezas: 300 naranjas y 200 manzanas. Por experiencias anteriores se sabe que en cada envío están estropeadas un 15 % de las naranjas y un 5 % de las manzanas. Se extrae una pieza al azar de un cajón cualquiera.

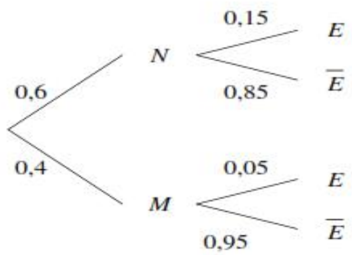
a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté estropeada?

b) Si la pieza elegida está en buenas condiciones, ¿qué es más probable, que sea naranja o que sea manzana?

Solución:

Para resolver este ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol, considerando los sucesos:

N: "sacar naranja".
M: "sacar manzana".
E: "estar estropeada".
$\overline{E}$: "no estar estropeada".



a) La probabilidad de que una fruta elegida al azar esté estropeada viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P(E) = P(N) \cdot P(E/N) + P(M) \cdot P(E/M) =$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}15 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}11$$

b) La probabilidad de que la fruta elegida sea naranja, sabiendo que está en buen estado viene dada por (teorema de Bayes):

$$P(N/\overline{E}) = \frac{P(\overline{E}/N)\cdot P(N)}{P(\overline{E})} = \frac{P(N\cap\overline{E})}{1-P(E)} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}85}{1-0{,}11} = \frac{0{,}51}{0{,}89} = 0{,}5730$$

Por otra parte, la probabilidad de que la fruta elegida sea manzana, sabiendo que está en buen estado viene dada por (teorema de Bayes):

$$P(M/\overline{E}) = \frac{P(\overline{E}/M)\cdot P(M)}{P(\overline{E})} = \frac{P(M\cap\overline{E})}{1-P(E)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}95}{1-0{,}11} = \frac{0{,}38}{0{,}89} = 0{,}4270$$

Por tanto es más probable que sea naranja.

4. El 75 % de los alumnos de un instituto practican algún deporte, el 30 % tocan un instrumento musical y el 15% realiza ambas actividades. Calcula la probabilidad de que un alumno del instituto elegido al azar no realice ninguna de las dos actividades.

Formamos una tabla de doble entrada (contingencia):

	M	$\overline{M}$	Total
D	0.15	0.6	0.75
$\overline{D}$	0.15	0.1	0.25
Total	0.3	0.7	1

Solución: $P\left(\overline{D}\cap\overline{M}\right) = 0.1$.

OPCIÓN B

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   a) Halla $A^2 - A + I^2$ donde I es la matriz identidad.

   b) Plantea y resuelve un sistema de ecuaciones lineal homogéneo que tenga a A como matriz asociada.

Solución:

a) Como

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad I^2 = I$$

Se tiene que:

$$A^2 - A + I^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Un sistema homogéneo es aquel en el que los términos independientes de sus ecuaciones son todos nulos. Entonces, el sistema de ecuaciones lineal homogéneo que tenga a A como matriz asociada es:

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

Dicho sistema es compatible determinado pues el determinante de su matriz asociada, A, es no nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Por tanto, el sistema sólo tiene una solución que es la trivial, es decir:

$$x = y = z = 0$$

A dicho resultado se llega también despejando z de la última ecuación, obteniendo $z = 0$. Si sustituimos este valor en la primera ecuación y despejamos y, se tiene que $y = 0$. Finalmente sustituyendo estos dos valores en la segunda ecuación y despejando x se obtiene, $x = 0$.

2. Halla la expresión de la función $f(x)$ polinómica de grado 3, sabiendo que tiene un mínimo relativo en el punto (1, 1), que su derivada $f'(x)$ tiene una raíz en el punto de abscisa $x = -3$ y que corta al eje de ordenadas en el punto (0, 11).

Solución:

Una función polinómica de grado tres es de la forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Interpretemos la información dada:

- Tiene un mínimo relativo en el punto (1, 1) $\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$
- Su derivada $f'(x)$ tiene una raíz en el punto de abscisa $x = -3 \Rightarrow f'(-3) = 0$
- Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 11) $\Rightarrow f(0) = 11$

Como $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, entonces las condiciones anteriores se traducen en:

$$f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$$

$$f'(-3) = 0 \Rightarrow 27a - 6b + c = 0$$

$$f(0) = 11 \Rightarrow d = 11$$

Sustituyendo el valor de d en la primera ecuación, se obtiene el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas siguiente:

$$\begin{cases} a + b + c = -10 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 27a - 6b + c = 0 \end{cases}$$

Resolvámoslo aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 27 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 27f_1]{f_2 \to f_2 - 3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & 30 \\ 0 & -33 & -26 & 270 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to f_3 - 33f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & 30 \\ 0 & 0 & 40 & -720 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente al que hemos llegado es:

$$\begin{cases} a + b + c = -10 \\ -b - 2c = 30 \\ 40c = -720 \end{cases}$$

Despejando c de la última ecuación, obtenemos que $c = -18$. Si sustituimos este valor en la segunda ecuación y despejamos b, se tiene que $b = 6$. Finalmente sustituyendo estos dos valores en la primera ecuación y despejando a se obtiene, $a = 2$. Por tanto, la función buscada es:

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 11$$

3. Una Universidad pública recibe 800 solicitudes de acceso para uno de los Grados en los que la oferta de plazas se reduce a 120. Sabiendo que la nota final, de un solicitante, después de las pruebas de acceso sigue una distribución normal de media 7,3 y desviación típica 0,7, calcula la nota mínima para obtener una de las 120 plazas ofertadas.

Solución:

La proporción de alumnos que consigue plaza es: $\frac{120}{800} = 0.15$.

Si consideramos la normal N(0,1), buscamos el valor a partir del cual la probabilidad es ese valor:

$P(z > k) = 0.15 \Rightarrow 1\text{-}P(z \le k) = 0.15$; $P(z \le k) = 1\text{-}0.15$; $P(z \le k) = 0.85$.

Acudimos a la tabla de la Normal y obtenemos $k = 1.04$.

Trasladamos ese valor a la normal que se considera: N(7.3,0.7):

$\frac{x-7.3}{0.7} = 1.04$; $x-7.3 = 0.728$; $x = 8.028$.

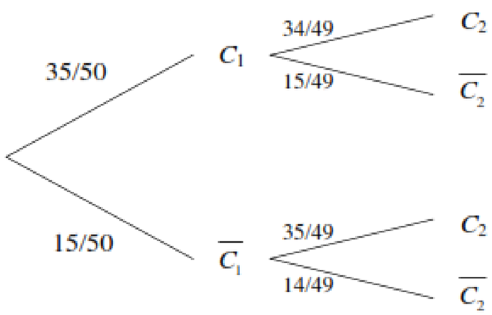
Solución: 8.028.

4. Un examen de oposición consiste en desarrollar por escrito un tema de un total de 50. El tribunal elige al azar 2 temas y cada candidato debe escoger uno de ellos. Halla la probabilidad de que un candidato suspenda el examen si tan sólo ha estudiado 35 temas.

Solución:

Este problema se puede resolver utilizando el siguiente diagrama de árbol, en el cual elegimos dos temas de manera consecutiva y sin devolución. Consideremos los siguientes sucesos:

C_i: "Sacar un tema conocido en la extracción *i*-ésima"
$\overline{C_i}$: "Sacar un tema desconocido en la extracción *i*-ésima"



Si se sacan 2 temas al azar, la probabilidad de que un candidato suspenda el examen es:

$$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = P(\overline{C_1}) \cdot P(\overline{C_2} / \overline{C_1}) = \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} = \frac{210}{2450} = \frac{3}{35} \approx 0{,}0857$$