Septiembre 2011

OPCIÓN A

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+2y-2z=4 \\ 8x+8y+az=8 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema en función de sus posibles soluciones para los distintos valores del parámetro a.
b) Halla todas sus soluciones para $a=-3$.

Solución:

a) Consideremos la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada $\overline{A}$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 8 & 8 & a \end{pmatrix} \qquad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 8 & 8 & a & 8 \end{array}\right)$$

Estudiemos los rangos de estas matrices. Se tiene que:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 8 & 8 & a \end{vmatrix}=2a+24+32-16+16+6a=8a+56$$

Dicho determinante se anula para $a=-7$. Por tanto:

- Si $a\neq -7 \quad \Rightarrow \quad$ rango A = rango $\overline{A}=3 \quad \Rightarrow \quad$ S.C.D. $\Rightarrow$ Solución única.
- Si $a=-7 \quad \Rightarrow \quad$ rango $A=2$, ya que podemos encontrar un menor de orden dos no nulo en ella, por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=8\neq 0$. Además, orlando dicho menos con los elementos de la última fila y la columna de los términos independientes, se tiene que: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}=-32$ y por tanto rango $\overline{A}=3 \quad \Rightarrow \quad$ S.I. $\Rightarrow$ Sin soluciones.

Vamos a resolverlo para el caso $a\neq -3$ utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 8 & 8 & -3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3\to 8f_3-f_1]{f_2\to f_2-3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 4 \\ 0 & 24 & -11 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3\to f_3-3f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

Despejando z de la última ecuación se obtiene que $z = -1$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación, se llega a que $y = -\frac{1}{8}$. Finalmente, sustituyendo los valores de y y z obtenidos en la primera ecuación, se llega a que $x = \frac{3}{4}$.

Otra forma de obtener la solución para $a = -3$ es mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 8 & 8 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 8 & 8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 8 & 8 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 8 & 8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{32} = -\frac{1}{8} \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 8 & 8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-32}{32} = -1$$

2. Los beneficios diarios de una fábrica, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = -x^2 + 24x - 100$, donde x indica el número de unidades que se producen al día.
a) Calcula el número de unidades que han de producirse diariamente para obtener el máximo beneficio.
b) Calcula el máximo beneficio que puede obtenerse en un día.

Solución:

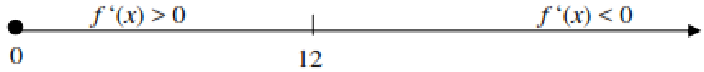
a) Para conocer los beneficios máximos de la fábrica, debemos estudiar la derivada primera de $f(x)$:

$$f'(x) = -2x + 24$$

Igualándola a cero para calcular los puntos singulares obtenemos que:

$$-2x + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 12$$

Teniendo en cuenta que $x \in [0, +\infty)$, si dibujamos sobre una recta esta semirrecta y el punto singular obtenido y estudiamos el signo de $f'(x)$, tenemos:



Se tiene entonces que los beneficios máximos de la fábrica se obtienen cuando se producen 12 unidades diariamente.

b) El máximo beneficio que puede obtenerse en un día viene dado por $f(12)$:

$$f(12) = -12^2 + 24 \cdot 12 - 100 = -144 + 288 - 100 = 44 \text{ (miles de euros)}$$

3. El censo realizado en una comunidad autónoma española determina que el 40 % de la población inmigrante procede del norte de África, el 20 % procede de países asiáticos y el resto procede de los países de Sudamérica. Además, el 50% de los procedentes del norte de África, el 25% de los procedentes de Asia y el 65% de los procedentes de Sudamérica están en situación administrativa legal.

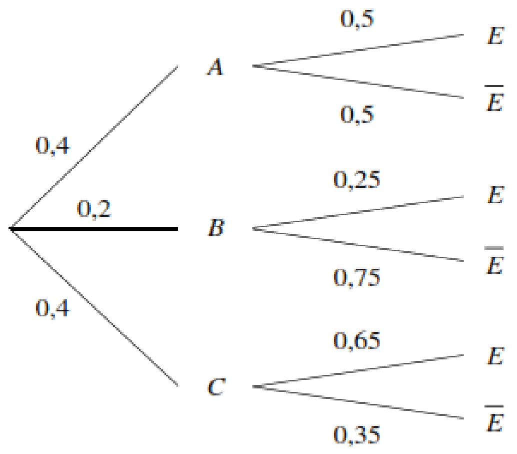
a) Elegido un inmigrante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su situación administrativa sea legal?

b) Elegido un inmigrante en situación administrativa ilegal, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de Sudamérica?

Solución:

Para resolver este ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol, considerando los sucesos:

A: "proceder del norte de África".
B: "proceder de países asiáticos".
C: "proceder de Sudamérica".
E: "estar en situación administrativa legal".
$\overline{E}$: "no estar en situación administrativa legal".



a) La probabilidad de la situación administrativa de un inmigrante elegido al azar sea legal viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P(E) = P(A) \cdot P(E / A) + P(B) \cdot P(E / B) + P(C) \cdot P(E / C) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}65 = 0{,}51$$

b) La probabilidad de que el inmigrante proceda de Sudamérica, sabiendo que su situación administrativa es ilegal viene dada por (teorema de Bayes):

$$P(C / \overline{E}) = \frac{P(\overline{E}/C) \cdot P(C)}{P(\overline{E})} = \frac{P(C \cap \overline{E})}{1 - P(E)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}35}{1 - 0{,}51} = \frac{0{,}14}{0{,}49} = 0{,}2857$$

4. Sean A y B dos sucesos independientes con probabilidades $P(A) = 0{,}2$ y $P(B) = 0{,}5$. Calcula $P(\overline{A \cup B})$.

Solución:

Por ser los sucesos A y B independientes se tiene que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$$

Por otra parte tenemos que:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [0{,}2 + 0{,}5 - 0{,}1] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

Otra forma de resolver el problema, sería tener en cuenta que si dos sucesos A y B son independientes entonces también lo son sus complementarios $\overline{A}$ y $\overline{B}$. Por tanto, como:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 \qquad \text{y} \qquad P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

entonces

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$$

Tendremos, aplicando las leyes de De Morgan que:

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4$$

OPCIÓN B

1. En una quesería se producen dos tipos de queso de leche de oveja: fresco y curado. La elaboración de un queso curado requiere 6 litros de leche de oveja y la de un queso fresco 3 litros. La ganancia por la venta de un queso fresco es 10 euros y por la de uno curado es 30 euros. Se sabe que la quesería dispone diariamente de 1800 litros de leche de oveja y su capacidad de producción es de 500 quesos diarios. Debido a la demanda, la producción de queso fresco debe ser al menos el doble que la de queso curado.
Utiliza técnicas de programación lineal para encontrar la producción de quesos que hace máxima la ganancia diaria total de la fábrica por la venta de quesos, así como dicha ganancia máxima.

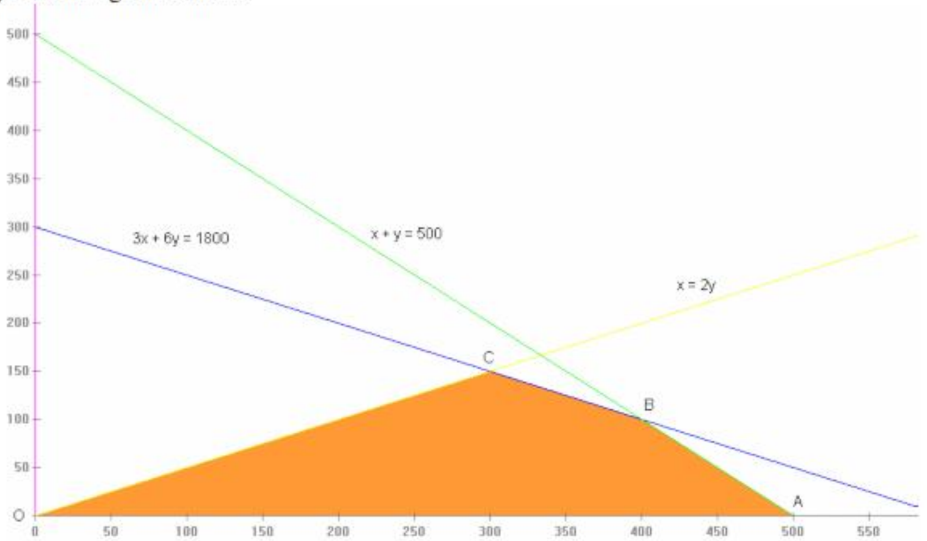
Solución:

Sean x e y el número de quesos frescos y curados respectivamente. A partir del enunciado del problema podemos establecer las siguientes condiciones:

$$\begin{gathered} 3x + 6y \leq 1800 \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{gathered}$$

La función a maximizar, que nos da el beneficio obtenido por el fabricante es: $F(x, y) = 10x + 30y$

Dibujemos la región factible:



Los vértices de esta región son los puntos:

O (0, 0) A (500, 0) B (400, 100) C (300, 150)

El máximo de la función objetivo se presentará en uno de estos puntos. Veamos en cual:

$F(0, 0) = 10 \cdot 0 + 30 \cdot 0 = 0$
$F(500, 0) = 10 \cdot 500 + 30 \cdot 0 = 5000$

$F(400, 100) = 10 \cdot 400 + 30 \cdot 100 = 7000$
$F(300, 150) = 10 \cdot 300 + 30 \cdot 150 = 7500$

Por tanto el beneficio máximo es de 7500 euros y se consigue elaborando 300 quesos frescos y 150 quesos curados.

2. Sea una función $f(x)$ de la que se conoce su derivada $f'(x) = x^2 - 1$.
a) Representa gráficamente $f'(x)$.
b) Deduce de la gráfica los intervalos de crecimiento de $f(x)$.
c) Halla la abscisa de los puntos máximos y mínimos de $f(x)$.

Solución:

a) La función $f'(x)$ es un función polinómica de segundo grado y por tanto su gráfica se corresponde con la de una parábola. Sus ramas irán dirigidas hacia arriba por ser el coeficiente principal (término de mayor grado) positivo. Calculemos el vértice de la misma:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_v = f'(0) = 0^2 - 1 = -1$$

Por tanto el vértice es el punto $V(0, -1)$.

Calculemos los puntos de corte de la misma con los ejes:

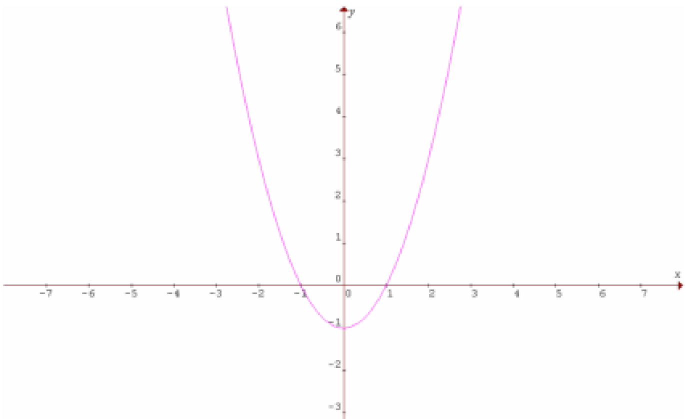
- Eje Y $(x = 0)$ $\Rightarrow$ Punto $(0, f'(0)) = (0, -1)$
- Eje X $(y = 0)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$ $\Rightarrow$ $x^2 - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $x^2 = 1$ $\Rightarrow$ $x = \pm 1$

Puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$

Para completar el dibujo de la parábola podemos dar algunos valores:

x	2	–2	3	–3	4	–4
$f'(x) = x^2 - 1$	3	3	8	8	15	15

La representación de la parábola es pues:



b) Para deducir de la gráfica anterior los intervalos de crecimiento de $f(x)$, tengamos en cuenta que:

$f(x)$ es creciente en un intervalo si para cada punto del mismo se cumple que $f'(x) > 0$

$f(x)$ es decreciente en un intervalo si para cada punto del mismo se cumple que $f'(x) < 0$

Por tanto, únicamente debemos fijarnos en los intervalos donde $f'(x)$ es positiva (su gráfica está por encima del eje X) y donde es negativa (su gráfica está por debajo del eje X)

$f(x)$ es creciente en $(-\infty,-1) \cup (1, \infty)$

$f(x)$ es decreciente en $(-1, 1)$

c) Finalmente, para hallar la abscisa de los puntos máximos y mínimos de $f(x)$, debemos pensar que estos se presentan en los puntos singulares, es decir, en aquellos puntos solución de la ecuación $f'(x) = 0$. En el caso que nos ocupan estos son $x = -1$ y $x = 1$.

Aunque aquí no lo piden, se puede saber el tipo de extremo que es cada uno de estos puntos sólo con fijarse en cómo cambia la monotonía en los mismos. Así tenemos que:

$x = -1$ es un máximo pues en él la monotonía cambia de creciente a decreciente

$x = 1$ es un mínimo pues en él la monotonía cambia de decreciente a creciente

3. En un almacén hay un gran número de cajas. El peso de cada una de ellas es una variable aleatoria con distribución normal de media 50 kg y desviación típica 5 kg.
a) Halla el porcentaje de cajas que pesan entre 50 y 55 kg.
b) Para transportar las cajas se dispone de un camión que tiene autorizado un peso máximo de 2000 kg en total. ¿Cuál es la probabilidad de que el camión soporte la carga de 41 cajas sin exponerse a superar el peso máximo autorizado?

Solución:

Consideremos la variable aleatoria X que nos da el peso de cada una de las cajas del almacén. Dicha variable sigue una distribución normal $N(50, 5)$.

a) Para calcular el porcentaje de cajas que pesan entre 50 y 55 kg, tipificamos como sigue:

$$P(50 \leq X \leq 55) = P\left(\frac{50-50}{5} \leq \frac{X-50}{5} \leq \frac{55-50}{5}\right) = P(0 \leq Z \leq 1) =$$
$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq 0) = 0{,}8413 - 0{,}5 = 0{,}3413$$

Por tanto, el porcentaje de cajas que pesan entre 50 y 55 kg es del 34,13 %.

b) Si consideramos la carga del camión como una variable aleatoria, S, suma de vlos pesos de las 41 cajas, entonces debemos tener en cuenta que la variable aleatoria suma, S, se distribuye según:

$$S \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n}) = N(41 \cdot 50, 5 \cdot \sqrt{41}) = N(2050; 32{,}02)$$

Por tanto, la probabilidad de que el camión soporte la carga de 41 cajas sin exponerse a superar el peso máximo autorizado es $P\ (S \leq 2000)$:

$$P\ (S \leq 2000) = P\left(Z \leq \frac{2000-2050}{32{,}02}\right) \approx P\ (Z \leq -1{,}56) = 1 - P\ (Z \leq 1{,}56) = 1 - 0{,}9406 = 0{,}0594$$

4. En cierto instituto aprueba la asignatura de filosofía el 80 % de los alumnos. ¿Cuál es la probabilidad de que de un grupo de 8 alumnos elegidos al azar hayan aprobado 6 alumnos?

Solución:

Consideremos la variable aleatoria X que nos indica el número de aprobados en filosofía. Dicha variable aleatoria, para el caso que nos ocupa, sigue una distribución binomial $B\ (8;\ 0{,}8)$ ya que:

$$n = 8, \quad p = P\ (\text{Aprobar filosofía}) = 0{,}8$$

Sabemos que la probabilidad de r éxitos en n intentos para una distribución binomial viene dada por:

$$p(X = r) = \binom{n}{r} p^r \left(1-p\right)^{n-r}$$

Por tanto la probabilidad de encontrar 6 aprobados entre los ocho alumnos es:

$$P\ (X = 6) = \binom{8}{6}\ (0{,}8)^6\ (0{,}2)^2 = 0{,}2936$$