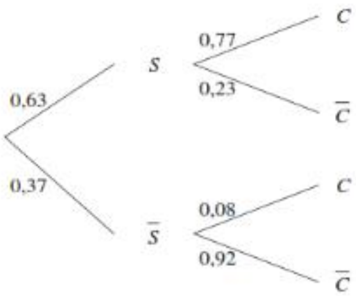
Junio 13

3. Según el informe anual *La Sociedad de la Información 2012*, el 63 % de los usuarios de móvil en España tiene un "Smartphone". Entre los propietarios de este tipo de teléfono, el 77 % lo emplea para su conexión habitual a Internet. Sin embargo, entre los propietarios de otro tipo de teléfono móvil sólo el 8 % lo emplea para la conexión habitual a Internet.
   a) Calcula la probabilidad de conectarse habitualmente a Internet a través del teléfono móvil.
   b) Si un usuario emplea habitualmente el teléfono móvil para conectarse a Internet, halla la probabilidad de que sea propietario de un "Smartphone".

Solución:
Para resolver este ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol, considerando los sucesos:

S: "ser usuario de un Smartphone".
C: "usar habitualmente el teléfono móvil para conectarse a Internet".

Hagamos un diagrama de árbol para ayudarnos a resolver el problema:



a) La probabilidad que nos piden viene dada por (Teorema de la probabilidad total):

$$P(C) = P(S) \cdot P(C/S) + P(\overline{S}) \cdot P(C/\overline{S}) = 0{,}63 \cdot 0{,}77 + 0{,}37 \cdot 0{,}08 = 0{,}5147$$

b) En este caso, la probabilidad que nos piden viene dada por (Teorema de Bayes):

$$P(S/C) = \frac{P(S)\cdot P(C/S)}{P(C)} = \frac{P(S\cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}63\cdot 0{,}77}{0{,}5147} = 0{,}9425$$

4. En una cuidad, la probabilidad de que llueva un día de junio el del 10 %, y de que haga sol un 75 %. Si no es posible que en un mismo día de junio llueva y haga sol simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de que en un día de junio no llueva ni haga sol?

Solución:
Consideremos los siguientes sucesos:

L: "Llueve en un día de junio".
S: "Hace sol en un día de junio".

Según los datos del problema tenemos que:

$$P(L) = 0{,}10 \qquad \text{y} \qquad P(S) = 0{,}75$$

Por otra parte, nos dicen que no es posible que en un mismo día de junio llueva y haga sol simultáneamente, por tanto, estos dos sucesos son incompatibles, es decir, su intersección es el suceso imposible, $L \cap S = \varnothing$, o expresado en términos de probabilidad:

$$P(L \cap S) = 0$$

El problema nos pide la probabilidad de que en un día de junio no llueva ni haga sol, es decir, la probabilidad del suceso $\overline{L} \cap \overline{S}$. Así:

$$P(\overline{L} \cap \overline{S}) = \xrightarrow{\text{De Morgan}} = P(\overline{L \cup S}) = 1 - P(L \cup S) = 1 - [P(L) + P(S)] =$$

$$= 1 - (0{,}10 + 0{,}75) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$$

4. El 60 % de los clientes de una frutería compran naranjas y el 30 % no compra ni naranjas ni manzanas. ¿Qué porcentaje de clientes compra manzanas, pero no naranjas?

Solución:
Consideremos los siguientes sucesos:

> N: "Comprar naranjas".
> M: "Comprar manzanas".

Según los datos del problema tenemos que:

$$P(N) = 0{,}60 \qquad \text{y} \qquad P(\overline{N} \cap \overline{M}) = 0{,}30$$

El problema nos pide el porcentaje (probabilidad x 100) de clientes que compra manzanas, pero no naranjas. En base a los sucesos definidos anteriormente esta probabilidad se expresa como:

$$P(M \cap \overline{N}) = P(M - N) = P(M \cup N) - P(N)$$

Por tanto, para calcular la probabilidad pedida nos hace falta conocer $P(M \cup N)$, que se calcula fácilmente si recordamos las leyes de De Morgan:

$$P(\overline{N} \cap \overline{M}) = \xrightarrow{\text{De Morgan}} = P(\overline{N \cup M}) = 1 - P(N \cup M)$$

Despejando:

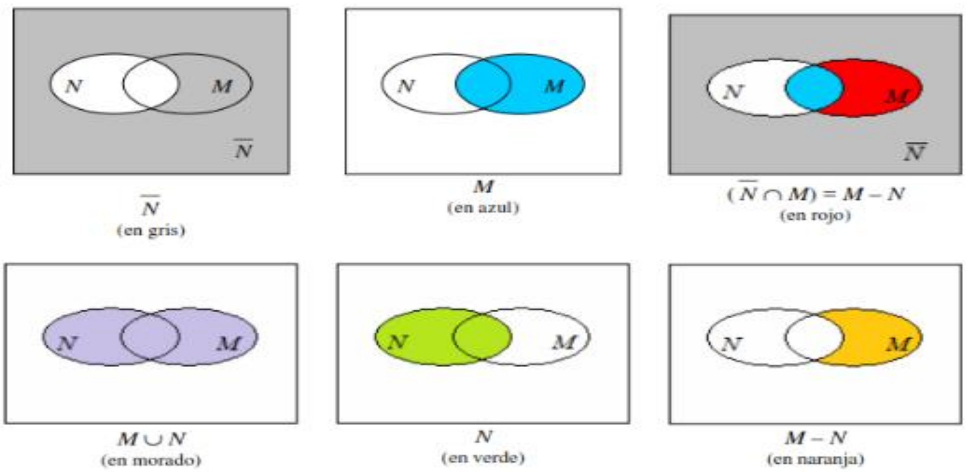
$$P(N \cup M) = 1 - P(\overline{N} \cap \overline{M}) = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$$

Entonces:

$$P(M \cap \overline{N}) = P(M - N) = P(M \cup N) - P(N) = 0{,}70 - 0{,}60 = 0{,}10$$

Por tanto, el porcentaje de clientes que compra manzanas, pero no naranjas es del 10 %.

Ayuda: Observa las figuras



$$M \cup N = N \cup (M - N) \quad \text{y} \quad N \cap (M - N) = \varnothing$$

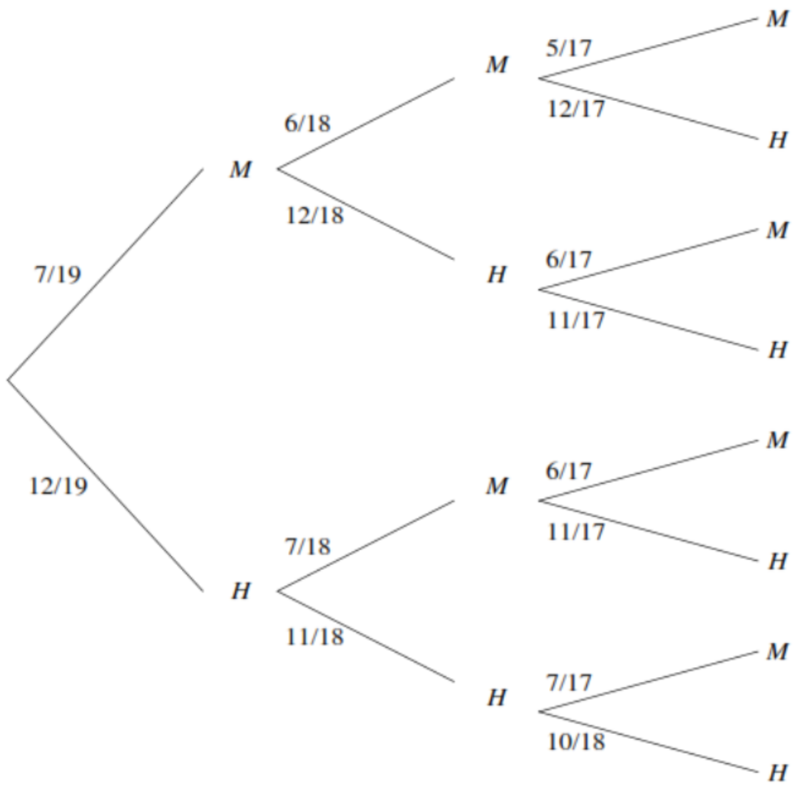
$$P(M \cup N) = P(N) + P(M - N) \quad \Rightarrow \quad P(M - N) = P(M \cup N) - P(N)$$

Septiembre 13

4. En una clase de inglés hay 7 mujeres y 12 hombres. Si se seleccionan 3 personas al azar, halla la probabilidad de que se seleccionen 2 mujeres y un hombre.

Solución:

Este problema se puede resolver utilizando el siguiente diagrama de árbol, en el cual elegimos a tres personas de manera consecutiva y sin devolución (M : "ser mujer"; H: "ser hombre"):



Si se escogen tres personas al azar, la probabilidad de que se seleccionen 2 mujeres y un hombre viene dada por tres caminos diferentes en el diagrama de árbol (teorema de la probabilidad total). Así, si sumamos las probabilidades de esas tres ramas obtenemos:

$$P\,(2M \text{ y } 1H) = P\,(M \cap M \cap H) + P\,(M \cap H \cap M) + P\,(H \cap M \cap M) =$$

$$= \frac{7}{19}\cdot\frac{6}{18}\cdot\frac{12}{17} + \frac{7}{19}\cdot\frac{12}{18}\cdot\frac{6}{17} + \frac{12}{19}\cdot\frac{7}{18}\cdot\frac{6}{17} = 3\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{7}{18}\cdot\frac{6}{17} = \frac{84}{323} \approx 0{,}26$$

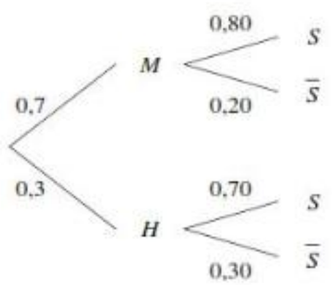
3. El 70 % de las compras de un supermercado las realizan mujeres. El 80 % de las compras realizadas por éstas supera los 20 €, mientras que sólo el 30 % de las realizadas por hombres supera esa cantidad.

a) Elegido un ticket de compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 20 €?
b) Si se sabe que un ticket de compra no supera los 20 €, ¿cuál es la probabilidad de que la compra la hiciera una mujer?

Solución:

Para resolver este ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol, considerando los sucesos:

M: "compra realizada por una mujer".
H: "compre realizada por un hombre".
S: "compra superior a 20 euros".
$\overline{S}$: "compra no superior a 20 euros".



a) Elegido un ticket de compra al azar, la probabilidad de que supere los 20 € viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P\,(S) = P\,(M)\cdot P\,(S\,/\,M) + P\,(H)\cdot P\,(S\,/\,H) = 0{,}70\cdot 0{,}80 + 0{,}3\cdot 0{,}70 = 0{,}77$$

b) Si se sabe que un ticket de compra no supera los 20 €, la probabilidad de que la compra la hiciera una mujer viene dada por (teorema de Bayes):

$$P\,(M\,/\,\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}\,/\,M)\cdot P(M)}{P(\overline{S})} = \frac{P(M\cap\overline{S})}{1-P(S)} = \frac{0{,}70\cdot 0{,}20}{1-0{,}77} = \frac{0{,}14}{0{,}33} = 0{,}4242$$

4. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución normal N (50, 10). Calcula la probabilidad $P\,(X \geq 80)$.

Solución:

$$P\,(X \geq 80) = P\left(Z \geq \frac{80-50}{10}\right) = P\,(Z \geq 3) = 1 - P\,(Z < 3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$

Junio 14

4. Sean A y B dos sucesos independientes, tal que $P\ (A) = 0{,}2$ y $P\ (A \cap B) = 0{,}16$. Halla la probabilidad de $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Solución:

La probabilidad pedida viene dada por:

$$P\,(\overline{A} \cap \overline{B}) \overset{(*)}{=} P\,(\overline{A \cup B}) = 1 - P\,(A \cup B) = 1 - [P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cap B)]$$

donde hemos utilizado una de las leyes de De Morgan en el paso marcado con (*).

En la última expresión a la que hemos llegado, nos falta por conocer la probabilidad de B, $P\,(B)$. Pero si tenemos en cuenta que los sucesos A y B son independientes, tal como se indica en el enunciado, entonces:

$$P\,(A \cap B) = P\,(A) \cdot P\,(B) \quad \Rightarrow \quad P\,(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}16}{0{,}2} = 0{,}8$$

Entonces:

$$P\,(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - [0{,}2 + 0{,}8 - 0{,}16] = 0{,}16$$

Otra forma de resolver el problema es teniendo en cuenta que si los sucesos A y B son independientes, también lo son $\overline{A}$ y $\overline{B}$. Por tanto:

$$P\,(\overline{A} \cap \overline{B}) = P\,(\overline{A}) \cdot P\,(\overline{B}) = [1 - \mathrm{P}\,(A)] \cdot [1 - P\,(B)] \overset{(*)}{=} [1 - 0{,}2] \cdot [1 - 0{,}8] = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$$

donde en el paso marcado con (*) hemos utilizado el valor para $P\,(B)$ calculado anteriormente.

3. Una fábrica de piezas para aviones está organizada en tres secciones. La sección *A* fabrica el 30 % de las piezas, la sección *B* el 35 %, mientras que el resto se fabrican en la sección *C*. La probabilidad de encontrar una pieza defectuosa es del 0.01, 0.015 y 0.009 según se considere la sección *A*, *B* o *C*, respectivamente.

a) Calcula la probabilidad de que una pieza elegida al azar salga defectuosa de dicha fábrica.

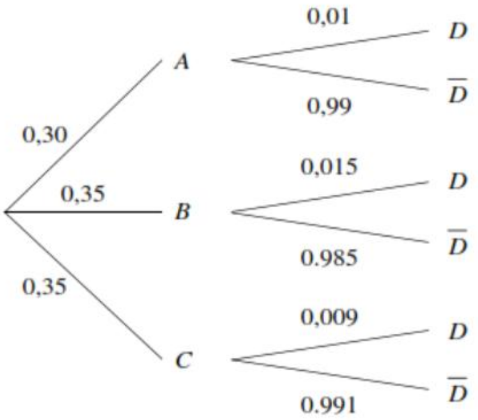
b) Si elegida una pieza al azar es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que sea de la sección *B*?

Solución:

En primer lugar, consideremos los siguientes sucesos:

A: "ser una pieza fabricada en la sección A"
B: "ser una pieza fabricada en la sección B"
C: "ser una pieza fabricada en la sección C"
D: "ser una pieza defectuosa"
$\overline{D}$: "ser una pieza no defectuosa"

Para resolver los dos apartados del ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol:



a) La probabilidad de que una pieza elegida al azar salga defectuosa de dicha fábrica viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$
$$= 0{,}30 \cdot 0{,}01 + 0{,}35 \cdot 0{,}015 + 0{,}35 \cdot 0{,}009 = 0{,}0114$$

Septiembre 14

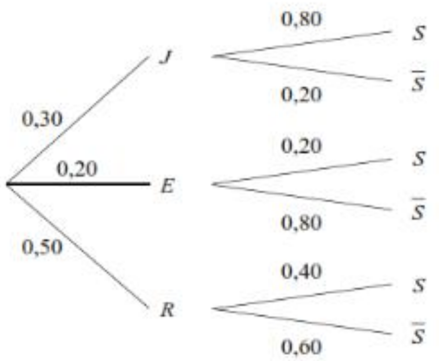
3. El 30 % de los habitantes de una localidad son jubilados y el 20 % son estudiantes, mientras que el resto ni están jubilados ni son estudiantes. El 80 % de los jubilados, así como el 20 % de los estudiantes y el 40 % del resto de habitantes, son socios del club de fútbol local.
   a) Elegido al azar un habitante de esa localidad, calcula la probabilidad de que sea socio del club de fútbol.
   b) Elegido al azar un socio del club de fútbol, calcula la probabilidad de que sea jubilado.

Solución:

En primer lugar, consideremos los siguientes sucesos:

J: "ser jubilado"
E: "ser estudiante"
R: "ser un habitante que ni está jubilado ni es estudiante"
S: "ser socio del club de fútbol local"

Para resolver los dos apartados del ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol:



a) La probabilidad de que un habitante de esa localidad elegido al azar sea socio del club de fútbol local viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P(S) = P(J) \cdot P(S/J) + P(E) \cdot P(S/E) + P(R) \cdot P(S/R) =$$
$$= 0{,}30 \cdot 0{,}80 + 0{,}20 \cdot 0{,}20 + 0{,}50 \cdot 0{,}40 = 0{,}48$$

b) La probabilidad de que un habitante elegido al azar sea jubilado, sabiendo que es socio del club de fútbol local, viene dada por (teorema de Bayes):

$$P(J/S) = \frac{P(J) \cdot P(S/J)}{P(S)} = \frac{P(J \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}80}{0{,}48} = 0{,}5$$

4. Calcula $P(A \cup B)$ sabiendo que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(B/A) = 0{,}3$.

Solución:

Tengamos en cuenta que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En esta expresión nos falta por conocer $P(A \cap B)$, pero lo podemos calcular fácilmente ya que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$$

Entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}12 = 0{,}78$$

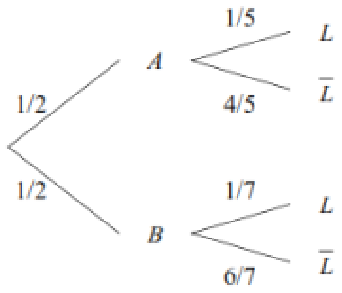
4. Tenemos dos llaves de un trastero, cada una en un llavero. Si elegimos una llave al azar de uno de los llaveros, ¿cuál es la probabilidad de que abra el trastero, sabiendo que uno de los llaveros tiene 5 llaves y el otro 7 llaves?

Solución:

En primer lugar, consideremos los siguientes sucesos:

A: "elegir el llavero con cinco llaves"
B: "elegir el llavero con siete llaves"
L: "elegir una llave que abre el trastero"

Para resolver los dos apartados del ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol:



La probabilidad de que una llave elegida al azar de uno de los llaveros abra el trastero viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P(L) = P(A) \cdot P(L/A) + P(B) \cdot P(L/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{1}{14} = \frac{12}{70} = \frac{6}{35} \approx 0{,}1714$$

Junio 15

3. Una panadería elabora magdalenas caseras cuyos pesos siguen una distribución normal con media 40 gramos y desviación típica 5 gramos.
a) Calcula el porcentaje de magdalenas que pesan más de 43 gramos.
b) Las magdalenas se empaquetan en bolsas de 20 magdalenas para su venta. El panadero considera aceptable una bolsa cuando su peso no supera los 820 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que una bolsa no sea aceptable?

Solución:

a) Consideremos la variable aleatoria X que asigna a cada magdalena su peso, en gramos. Dicha variable sigue una distribución:

$$X \sim N(40, 5)$$

Nos piden calcular el porcentaje de magdalenas que pesan más de 43 gramos, que podemos obtener a través de $P(X > 43)$:

$$P(X > 43) = P\left(Z > \frac{43-40}{5}\right) = P(Z > 0{,}6) = 1 - P(Z \leq 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$$

Por tanto el porcentaje de magdalenas que superan los 43 gramos es del 27,43 %.

b) Si se empaquetan las magdalenas en bolsas de 20 magdalenas, entonces el peso de cada bolsa, T, seguirá un distribución normal (por seguir el peso de las magdalenas una distribución normal) de parámetros:

$$T \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n}) = N(40 \cdot 20, 5 \cdot \sqrt{20}) = N(800, 22{,}36)$$

Entonces, como una bolsa no es aceptable si su peso supera los 820 gramos, tenemos que:

$$P(T > 820) = P\left(Z > \frac{820-800}{22{,}36}\right) = P(Z > 0.89) = 1 - P(Z \leq 0{,}89) = 1 - 0{,}8133 = 0{,}1867$$

Por tanto, la probabilidad de que una bolsa no sea aceptable es 0,1867.

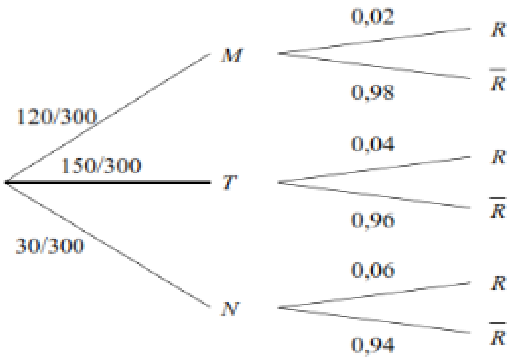
3. El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es 120, por la tarde 150 y por la noche 30. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2 %, por la tarde del 4 % y por la noche de un 6 %.
a) Calcula la probabilidad de que se retrase un vuelo con destino a este aeropuerto.
b) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo nocturno?

Solución:

En primer lugar, consideremos los siguientes sucesos:

M: "el vuelo llega al aeropuerto por la mañana"
T: "el vuelo llega al aeropuerto por la tarde"
N: "el vuelo llega al aeropuerto por la noche"
R: "el vuelo llega con retraso"
$\overline{R}$: "el vuelo no llega con retraso"

Para resolver los dos apartados del ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol:



a) La probabilidad de que un vuelo con destino a este aeropuerto se retrase viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P(R) = P(M)\cdot P(R/M) + P(T)\cdot P(R/T) + P(N)\cdot P(R/N) =$$

$$= \frac{120}{300}\cdot 0{,}02 + \frac{150}{300}\cdot 0{,}04 + \frac{30}{300}\cdot 0{,}06 = 0{,}008 + 0{,}02 + 0{,}006 = 0{,}034$$

b) La probabilidad de que fuera un vuelo nocturno, sabiendo que llegó con retraso, viene dada por (teorema de Bayes):

$$P(N/R) = \frac{P(N)\cdot P(R/N)}{P(R)} = \frac{P(N\cap R)}{P(R)} = \frac{(30/300)\cdot 0{,}06}{0{,}034} = 0{,}1765$$

4. La duración de una batería de móvil sigue una distribución normal de media 3 años y desviación típica 0,5 años. Calcula la probabilidad de que una batería dure entre 2 y 4 años.

Solución:

Consideremos la variable aleatoria X que nos indica la duración de una batería de móvil. Dicha variable sigue una distribución:

$$X \sim N(3;\, 0{,}5)$$

Por tanto, la probabilidad de que una batería dure entre 2 y 4 años es:

$$P(2 < X < 4) = P\left(\frac{2-3}{0{,}5} < Z < \frac{4-3}{0{,}5}\right) = P(-2 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -2) =$$

$$= 2\,P(Z < 2) - 1 = 2\cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$$

Septiembre 15

4. El 60 % de los clientes de una panadería compran pan y el 30 % no compran ni pan ni bollería. ¿Qué porcentaje de clientes compran bollería y no compran pan?

Solución:

Consideremos los siguientes sucesos:

A: "El cliente compra pan"
B: "El cliente compra bollería"

El suceso no comprar pan ni bollería vendrá dado por $\overline{A} \cap \overline{B}$. Por tanto, las probabilidades dadas son:

$$P(A) = 0{,}6 \quad \text{y} \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3$$

El porcentaje que nos piden lo podemos calcula a través de la probabilidad del suceso comprar bollería y no compran pan, es decir $P(\overline{A} \cap B)$:

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Con los datos que nos dan, si aplicamos una de las leyes de De Morgan, tenemos que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

Por tanto, $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Por otra parte, sabemos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

De aquí se deduce que:

$$P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A) = 0{,}7 - 0{,}6 = 0{,}1$$

Por tanto, la probabilidad de que un cliente compre bollería y no compre pan es:

$$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}1$$

Así pues, el porcentaje de clientes que compran bollería y no compran pan es del 10 %.

3. En el año 2014, el estudio *B2C-2014 sobre Comercio Electrónico* aseguraba que el 12,5 % de los compradores *on-line* fueron nuevos compradores. El importe gastado *on-line* variaba según el tipo de comprador: el 26,8 % de los nuevos compradores gastaban menos de 50 euros, mientras que sólo el 12 % de los antiguos compradores gastaban menos de esa cantidad. Se elige un comprador *on-line* al azar.

   a) Calcula la probabilidad de que gastara menos de 50 euros en las compras *on-line*.

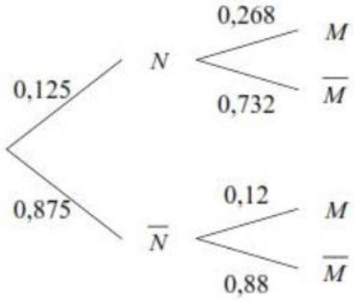
   b) Si el comprador *on-line* gastó menos de 50 euros, ¿cuál es la probabilidad de que fuera nuevo comprador?

Solución:

En primer lugar, consideremos los siguientes sucesos:

N: "ser un nuevo comprador *on-line*"
M: "gastarse menos de 50 euros en las compras *on-line*"

Para resolver los dos apartados del ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol:



a) La probabilidad de que el comprador elegido al azar gastara menos de 50 euros en las compras *on-line* viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P(M) = P(N) \cdot P(M/N) + P(\overline{N}) \cdot P(M/\overline{N}) =$$

$$= 0{,}125 \cdot 0{,}268 + 0{,}875 \cdot 0{,}12 = 0{,}0335 + 0{,}105 = 0{,}1385$$

b) La probabilidad de que un comprador *on-line*, que gastó menos de 50 euros, sea nuevo viene dada por (teorema de Bayes):

$$P(N/M) = \frac{P(N) \cdot P(M/N)}{P(M)} = \frac{P(N \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}125 \cdot 0{,}268}{0{,}1385} = \frac{0{,}0335}{0{,}1385} = 0{,}2419$$

4. Calcula el valor de $P(B)$ sabiendo que los sucesos A y B son independientes y qu $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ y $P(A) = \frac{1}{4}$.

Solución:

En primer lugar, tengamos en cuenta que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Por otra parte, como los sucesos A y B son independientes, se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sustituyendo esta segunda expresión en la primera, se tiene que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

Despejando $P(B)$ tenemos:

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{5}{8} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

Junio 17

3A- La lista electoral de un determinado partido político está formada por un número igual de hombres y mujeres. Un análisis sociológico de dichas listas revela que el 60% de los hombres tienen 40 o más años de edad, mientras que el 30% de las mujeres tienen menos de 40 años. Se elige al azar una persona que forma parte de las listas electorales.
a) Calcula la probabilidad de que tenga menos de 40 años.
b) Sabiendo que tiene 40 o más años de edad, calcula la probabilidad de que sea mujer.

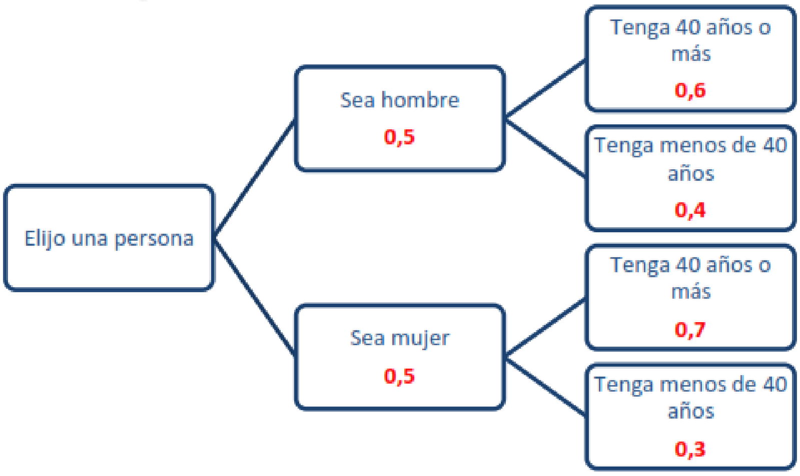
Podemos hacer un cálculo sencillo de la probabilidad pasando todo a valores absolutos.
Supongamos que hay 200 integrantes en el partido político en cuestión (suponemos esta cantidad por lo fácil que será para el resto de cálculos).
100 son mujeres y 100 son hombres. De los 100 hombres 60 tienen 40 o más años de edad y 40 hombres tienen menos de 30 años. De las mujeres 70 tienen 40 o más años y 30 tienen menos de 30 años.

a) $P(\text{Tenga menos de 40 años}) = \dfrac{40+30}{200} = \dfrac{70}{200} = \boxed{0,35}$

b) $P(\text{Sea mujer / Tiene más de 40 años}) = \dfrac{70}{60+70} = \dfrac{70}{130} = \dfrac{7}{13} = \boxed{0,538}$

OTRA FORMA DE HACERLO

Realicemos un diagrama de árbol



a)

$$P(\text{Tenga menos de 40 años}) =$$
$$= P(\text{Es hombre})P(\text{Tenga menos de 40 años/ Es hombre}) +$$
$$+P(\text{Es mujer})P(\text{Tenga menos de 40 años / Es mujer}) =$$
$$= 0,5\cdot 0,4 + 0,5\cdot 0,3 = \boxed{0,35}$$

b)

$$P(\text{Sea mujer / Tiene más de 40 años}) = \frac{P(\text{Sea mujer y Tiene más de 40 años})}{P(\text{Tiene más de 40 años})} =$$
$$= \frac{P(\text{Sea mujer})P(\text{Tiene más de 40 años / Sea mujer})}{1-P(\text{Tiene menos de 40 años})} = \frac{0,5\cdot 0,7}{1-0,35} = \frac{0,35}{0,65} = \frac{35}{65} = \frac{7}{13} = \boxed{0,538}$$

4B- En una clase con 15 alumnos de segundo de bachillerato, 2 alumnos están jugando al mus y 5 están jugando al tute, mientras que el resto de alumnos no está jugando a las cartas. Si se eligen al azar dos alumnos, ¿qué probabilidad hay de que ninguno de los elegidos estén jugando a las cartas?

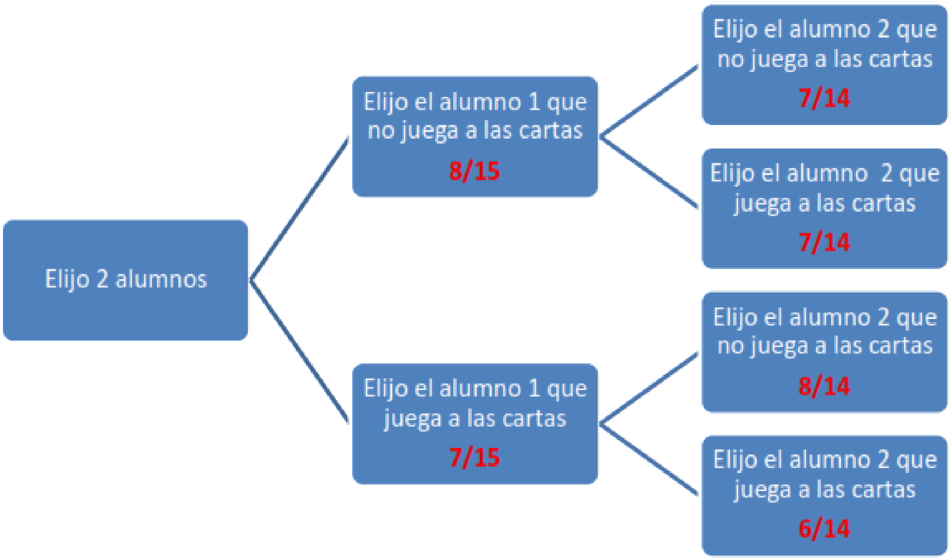
Son 7 los alumnos que juegan a las cartas y 8 los que no juegan a las cartas.

$P(\text{Ninguno de los 2 alumnos esté jugando a las cartas}) =$
$= P(\text{El primer elegido no esté jugando a las cartas}) \cdot$
$\cdot P(\text{El 2º elegido no esté jugando a las cartas / El 1º no juega a las cartas}) =$
$= \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} = \boxed{0,266}$

OTRA FORMA DE HACERLO

Son 7 los alumnos que juegan a las cartas y 8 los que no juegan a las cartas.

Hacemos un diagrama de árbol

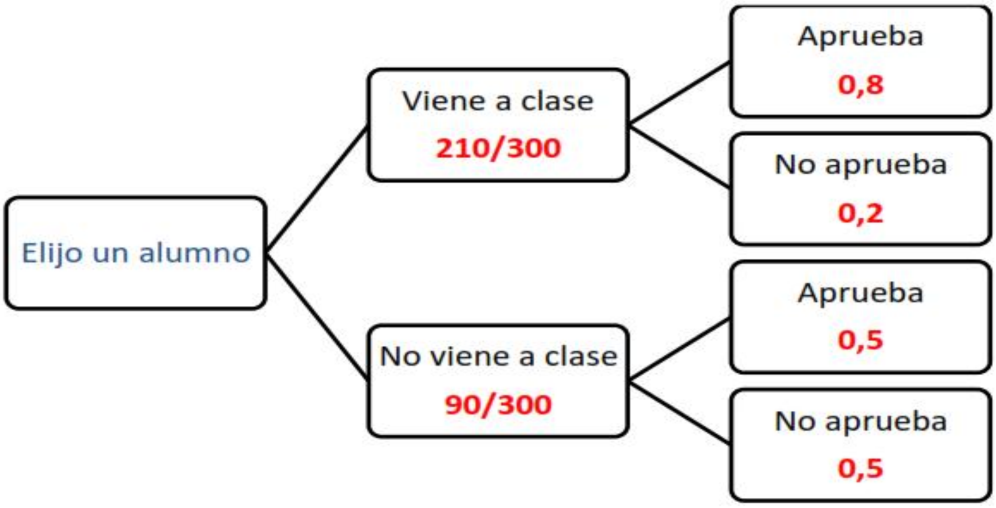


$P(\text{Ninguno de los 2 alumnos esté jugando a las cartas}) =$
$= P(\text{No juegue el alumno 1 a las cartas}) \cdot$
$\cdot P(\text{No juegue el alumno 2 a las cartas/ El alumno 1 no juega a las cartas}) =$
$= \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} = \boxed{0,266}$

Septiembre 17

3A- En una asignatura de primer curso de un grado universitario, asisten a clase regularmente 210 alumnos de los 300 alumnos matriculados. Al finalizar el período docente, superan la asignatura el 80% de los alumnos que asisten regularmente a clase y el 50% de los alumnos que no asisten regularmente a clase. Se elige un alumno matriculado al azar.
a) Calcula la probabilidad de que haya superado la asignatura y no haya asistido regularmente a clase. **(Hasta 1 punto)**
b) Sabiendo que ha superado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido regularmente a clase? **(Hasta 2 puntos)**

Realicemos un diagrama de árbol para ayudarnos a calcular las probabilidades pedidas.



a)

$$P(\text{Apruebe y no haya asistido a clase}) =$$
$$= P(\text{No haya asistido a clase})\,P(\text{Apruebe / No ha asistido a clase}) =$$
$$= \frac{90}{300}\cdot\frac{50}{100} = \frac{4500}{30000} = \frac{45}{300} = \boxed{\frac{15}{100} = 0{,}15}$$

b)

$$P(\text{Haya asistido a clase / Ha aprobado}) =$$
$$= \frac{P(\text{Haya asistido a clase y ha aprobado})}{P(\text{Ha aprobado})} = \frac{\frac{210}{300}\cdot 0{,}8}{\frac{210}{300}\cdot 0{,}8 + \frac{90}{300}\cdot 0{,}5} =$$
$$= \frac{\frac{168}{300}}{\frac{168}{300}+\frac{45}{300}} = \frac{168}{168+45} = \boxed{\frac{168}{213} = 0{,}79}$$

4A- En un grupo de 8 amigos se encuentran los 3 agraciados con un viaje para visitar Lisboa sorteado por la embajada portuguesa. Si hay 4 amigos que ya han visitado Lisboa, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de los agraciados haya visitado Lisboa?

De los 8 amigos 4 han visitado Lisboa y los otros 4 no.
Si elegimos 3 de los 8 amigos.

$$P(\text{Ninguno de los 3 elegidos ha visitado Lisboa}) =$$
$$= P(\text{El elegido 1 no ha visitado Lisboa})\cdot$$
$$\cdot P(\text{El 2º no ha visitado Lisboa / El 1º no ha visitado Lisboa})\cdot$$
$$\cdot P(\text{El 3º no ha visitado Lisboa / Ni el 1º, ni el 2º han visitado Lisboa}) =$$
$$= \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{24}{336} = \boxed{\frac{1}{14} = 0{,}071}$$

4B- El 48% de los trabajadores de una empresa son hombres. Si en esa empresa, el 82% de los hombres y el 75% de las mujeres están satisfechos con su trabajo, ¿qué porcentaje de trabajadores está satisfecho con su trabajo en esa empresa?

UNA FORMA DE HACERLO

Un simple cálculo de porcentajes.

HOMBRES → 48% son hombres, de ellos el 82% están satisfechos con su trabajo, es decir, el 82% del 48% de los trabajadores están satisfechos.

$$\frac{48}{100}\cdot\frac{82}{100}=\frac{3936}{10000}$$

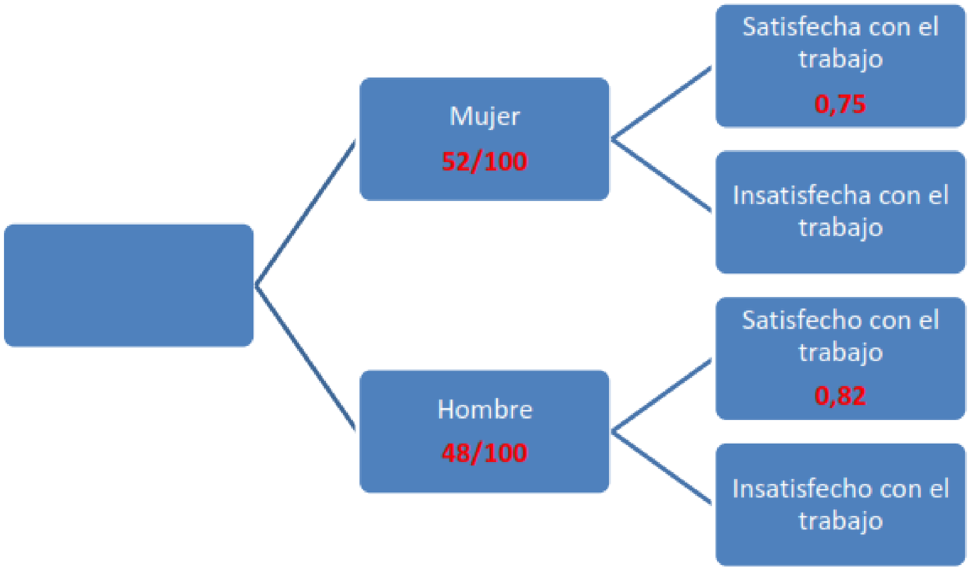
MUJERES → 52% son mujeres, de ellas el 75% están satisfechos con su trabajo, es decir, el 75% del 52% de los trabajadores están satisfechos.

$$\frac{52}{100}\cdot\frac{75}{100}=\frac{3900}{10000}$$

Si sumamos estas cifras tenemos $\frac{3936}{10000}+\frac{3900}{10000}=\frac{7836}{10000}=0,7836=\boxed{78,36\%}$

OTRA FORMA DE HACERLO

Realicemos un diagrama de árbol.



Con este esquema la probabilidad de que al elegir un trabajador esté satisfecho es:

$$P(\text{Elegir un trabajador y que esté satisfecho})=\frac{52}{100}\cdot 0,75+\frac{48}{100}\cdot 0,82=0,7836$$

Lo cual significa que el porcentaje de trabajadores satisfechos es del 78,36%

Junio 18

Ejercicio A4

El 40 % de los internautas utiliza *Dropbox* o *Google Drive* para almacenar archivos en la nube. Sabiendo que el 25 % emplea *Dropbox* y el 20 % emplea *Google Drive*, ¿qué porcentaje de internautas emplea ambos?

Sea D el suceso "utilizar *Dropbox*" y G el suceso "utilizar *Google Drive*". Entonces:

$$P(D) = 0{,}25, \qquad P(G) = 0{,}20, \qquad P(D \cup G) = 0{,}40$$

Teniendo en cuenta que:

$$P(D \cup G) = P(D) + P(G) - P(D \cap G)$$

La probabilidad de la intersección de ambos sucesos es:

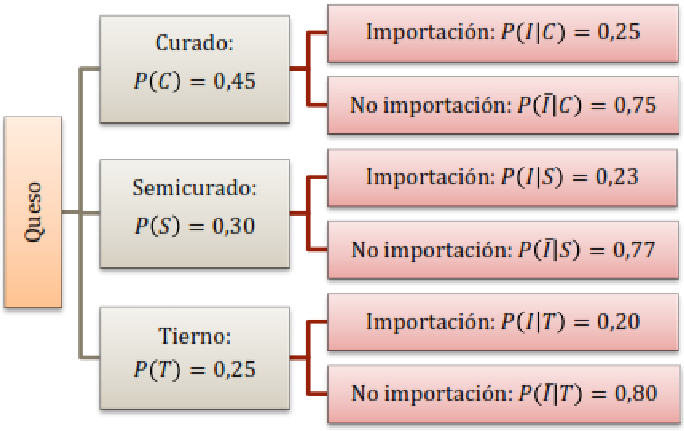
$$P(D \cap G) = P(D) + P(G) - P(D \cup G) = 0{,}25 + 0{,}20 - 0{,}40 = 0{,}05$$

Luego, el porcentaje de internautas que utiliza los dos sistemas de almacenamiento es del $\boxed{5\ \%}$.

Ejercicio B3

Una cadena de supermercados envasa tres variedades de queso en paquetes al vacío, en las proporciones que se indican: curado (45 %), semicurado (30 %) y tierno (25 %). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 25 % del queso curado, el 23 % del semicurado y el 20 % del tierno. Se elige al azar un paquete de queso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de importación?



$$P(\bar{I}) = P(C) \cdot P(\bar{I}|C) + P(S) \cdot P(\bar{I}|S) + P(T) \cdot P(\bar{I}|T) = 0{,}45 \cdot 0{,}75 + 0{,}30 \cdot 0{,}77 + 0{,}25 \cdot 0{,}80$$

$$\boxed{P(\bar{I}) = 0{,}7685 \longrightarrow 76{,}85\ \%}$$

b) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado?

Se trata de una probabilidad condicionada:

$$P(C|I) = \frac{P(C \cap I)}{P(I)} = \frac{P(C) \cdot P(I|C)}{1 - P(\bar{I})} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}25}{1 - 0{,}7685} \longrightarrow \boxed{P(C|I) = 0{,}4860 \longrightarrow 48{,}60\ \%}$$

Ejercicio B4

La probabilidad de que un alumno de Matemáticas apruebe un examen tipo test es del 80 %, mientras que la probabilidad de que apruebe un examen de problemas es del 60 %. Si la probabilidad de aprobar los dos exámenes es del 50 %, calcula la probabilidad de que no apruebe ninguno de los dos exámenes.

La probabilidad de aprobar un examen tipo test es $P(T) = 0{,}80$; la de aprobar un examen de problemas es $P(P) = 0{,}60$; y la de aprobar los dos, $P(T \cap P) = 0{,}50$. Se pide la probabilidad de no aprobar ninguno:

$$P(\bar{T} \cap \bar{P}) \xrightarrow{\text{Ley de Morgan}} P(\bar{T} \cap \bar{P}) = P(\overline{T \cup P}) = 1 - P(T \cup P)$$

Siendo $P(T \cup P) = P(T) + P(P) - P(T \cap P) = 0{,}80 + 0{,}60 - 0{,}50 = 0{,}90$. En definitiva:

$$P(\bar{T} \cap \bar{P}) = 1 - 0{,}90 \longrightarrow \boxed{P(\bar{T} \cap \bar{P}) = 0{,}10 \longrightarrow 10\ \%}$$

Julio 18

Ejercicio A3

Se sabe que el salario mensual de los trabajadores de dos empresas A y B sigue la distribución normal.

a) Si en la empresa A el salario mensual medio es de 1 200 € y su desviación típica es 400 euros, ¿cuál es la probabilidad de que un trabajador cobre más de 1 740 euros al mes?

El salario mensual de los trabajadores de la empresa A es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal, de media $\mu = 1\,200$ € y desviación típica $\sigma = 400$ €:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \longrightarrow X \sim N(1\,200, 400)$$

Se nos pide la probabilidad de que el sueldo de un trabajador supere los 1 740 € mensuales, es decir:

$$P(X > 1\,740)$$

Tipificando la variable, podemos recurrir a la tabla de desviación normal estándar $N(0,1)$ y conocer esta probabilidad:

$$P(X > 1740) = P\left(Z > \frac{1\,740 - 1\,200}{400}\right) = P(Z > 1,35) = 1 - P(Z < 1{,}35) = 1 - 0{,}9115 = \boxed{0{,}0885}$$

Es decir, el 8,85 % de los trabajadores cobrarían más de 1 740 euros al mes.

b) Si en la empresa B el 80,23 % de los trabajadores cobra menos de 1 570 euros, calcula la desviación típica del salario mensual sabiendo que el salario medio mensual es de 1 400 euros.

El salario mensual de los trabajadores de la empresa B es una variable aleatoria Y que sigue una distribución normal, de media $\mu = 1\,400$ € y desviación típica σ desconocida:

$$Y \sim N(1\,400, \sigma)$$

En este caso se nos dice que el 80,23 % de los trabajadores cobra menos de 1 570 €, lo que significa:

$$P(Y < 1\,570) = 0{,}8023$$

Tipificando la variable y localizando esta probabilidad en la tabla de distribución normal estándar, se deduce el valor de la desviación típica σ:

$$P\left(Z < \frac{1\,570 - 1\,400}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{170}{\sigma}\right) = 0{,}8023 \longrightarrow \frac{170}{\sigma} = 0{,}85 \longrightarrow \sigma = \frac{170}{0{,}85} = \boxed{200}$$

Ejercicio A4

Se sabe que si ha ocurrido A, la probabilidad de que ocurra B es 0,3. Halla la probabilidad de que, si ha ocurrido A no ocurra B.

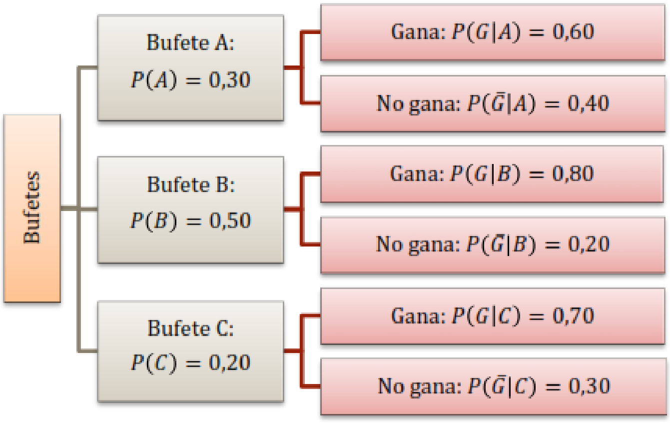
Una vez que ha ocurrido A, pueden suceder dos cosas (mutuamente excluyentes): que ocurra B o que no ocurra B. Lógicamente, ha de cumplirse que $P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) + P(\overline{\mathrm{B}}|\mathrm{A}) = 1$. Por lo tanto:

$$P(\overline{\mathrm{B}}|\mathrm{A}) = 1 - P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = 1 - 0{,}3 = \boxed{0{,}7}$$

Ejercicio B3

Una corporación informática utiliza tres bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados, el bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados, mientras que el bufete C recibe el 20 % de los casos legales y gana el 70 % de los casos presentados. Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales.

a) Determina la probabilidad de que la empresa gane el caso.



$$P(G) = P(A) \cdot P(G|A) + P(B) \cdot P(G|B) + P(C) \cdot P(G|C) = 0{,}30 \cdot 0{,}60 + 0{,}50 \cdot 0{,}80 + 0{,}20 \cdot 0{,}70$$

$$\boxed{P(G) = 0{,}72 \longrightarrow 72\ \%}$$

b) Si el caso elegido se ha ganado, calcula la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A.

Se trata de una probabilidad condicionada:

$$P(A|G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{P(A) \cdot P(G|A)}{P(G)} = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}60}{0{,}72} \longrightarrow \boxed{P(A|G) = 0{,}25 \longrightarrow 25\ \%}$$

Ejercicio B4

En una clase de yoga hay 7 mujeres y 12 hombres. Si se escoge a tres personas al azar, halla la probabilidad de que se seleccionen dos mujeres y un hombre.

$$P(MMH) = \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} \cdot \frac{12}{17} = \frac{504}{5814} = 0{,}0867$$

$$P(MHM) = \frac{7}{19} \cdot \frac{12}{18} \cdot \frac{6}{17} = \frac{504}{5814} = 0{,}0867$$

$$P(HMM) = \frac{12}{19} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{6}{17} = \frac{504}{5814} = 0{,}0867$$

$$\boxed{P_{total} = 0{,}2601 \longrightarrow 26{,}01\ \%}$$

Junio 19

3A- Las autoridades sanitarias están estudiando los efectos del tabaco en la salud. El tiempo que tarda un fumador en dejar definitivamente de fumar se ajusta a una distribución normal, de media 5 meses y desviación típica 2 meses. Con esta información:
a) Calcula la probabilidad de que un fumador tarde más de 4 meses en dejar definitivamente de fumar? **(1 punto).**
b) Si se toman 50 fumadores, calcula la probabilidad de que el tiempo medio que tardan los 50 fumadores en dejar definitivamente de fumar sea inferior a 6 meses. **(2 puntos)**

X = Tiempo en meses que un fumador tarda en dejar definitivamente de fumar.
X = N(5, 2)

a)

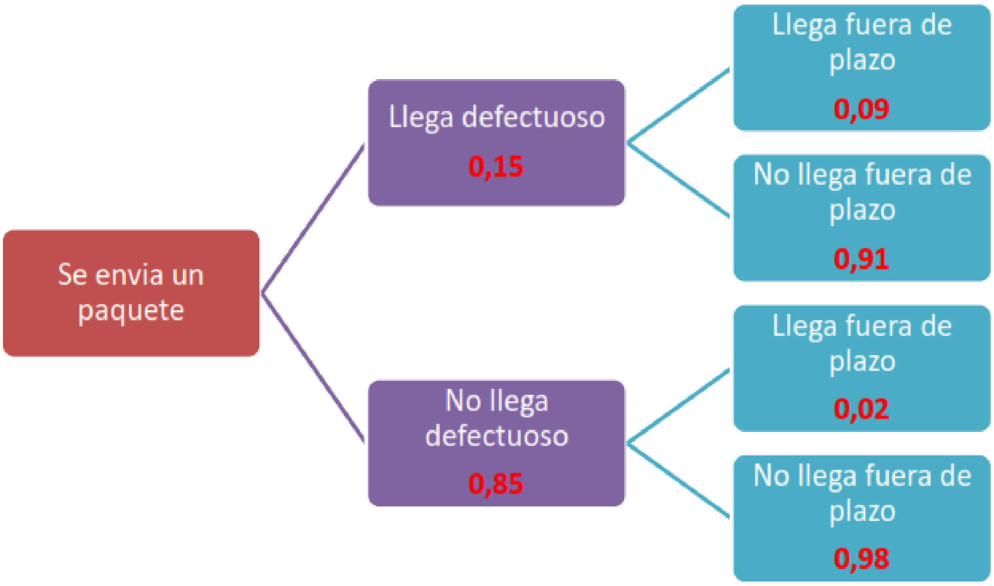
$$P(X > 4) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-5}{2} > \frac{4-5}{2}\right) = P(Z > -0,5) =$$
$$= P(Z \le 0,5) = \boxed{0,6915}$$

b) N = 50 → $\overline{X_{50}} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \overline{X_{50}} = N\left(5, \frac{2}{\sqrt{50}}\right) \Rightarrow \overline{X_{50}} = N\left(5, \frac{2}{\sqrt{50}}\right)$

$$P\left(\overline{X_{50}} < 6\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X_{50}}-5}{2/\sqrt{50}} < \frac{6-5}{\frac{2}{\sqrt{50}}}\right) = P(Z < 3,54) = \boxed{0,9998}$$

3B- El 15% de los paquetes repartidos por una empresa de transporte llegan defectuosos. Entre los paquetes que llegan defectuosos un 9% llega fuera de plazo, mientras que entre los no defectuosos sólo un 2 % llega fuera de plazo. Se elige un paquete al azar repartido por esta empresa:
a) Calcula la probabilidad de que el paquete elegido llegue fuera de plazo.
b) Sabiendo que el paquete elegido llega fuera de plazo, ¿qué probabilidad hay de que llegue defectuoso?

Realicemos un diagrama de árbol con los datos del problema.



a)

$$P(\text{Llega fuera de plazo}) = P(\text{Llega defectuoso})\,P(\text{Llega fuera de plazo/ Llega defectuoso}) +$$
$$+P(\text{No llega defectuoso})\,P(\text{Llega fuera de plazo/ No llega defectuoso}) =$$
$$= 0{,}15 \cdot 0{,}09 + 0{,}85 \cdot 0{,}02 = \boxed{0{,}0305}$$

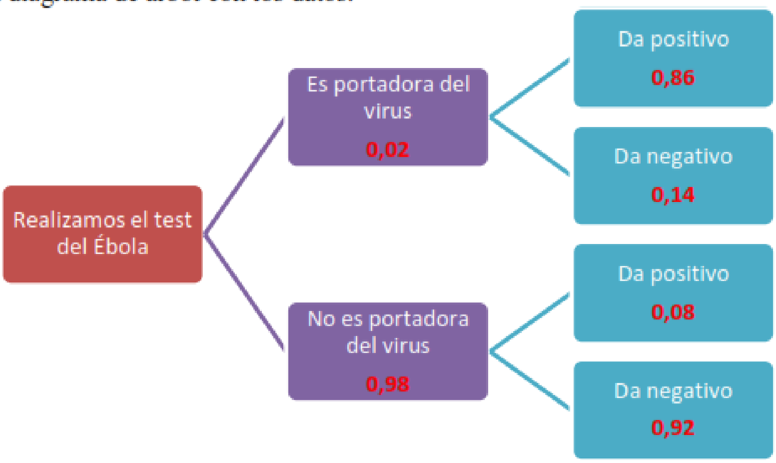
b)

$$P(\text{Llega defectuoso /Llega fuera de plazo}) = \frac{P(\text{Llega defectuoso y fuera de plazo})}{P(\text{Llega fuera de plazo})} =$$
$$= \frac{0{,}15 \cdot 0{,}09}{0{,}0305} = \boxed{0{,}443}$$

Julio 19

3A- Una multinacional farmacéutica elabora un test para la detección precoz de la enfermedad producida por el virus del Ébola. El test da positivo en el 86% de las personas que son portadoras del virus y da negativo en el 92% de las personas que no son portadoras del virus. Además, en una cierta zona geográfica el 2% de la población es portadora del virus. Se elige al azar una persona de esa zona geográfica y se la somete al test. Calcula razonadamente la probabilidad de que sea portadora del virus sabiendo que el test ha dado positivo.

Realizamos un diagrama de árbol con los datos.



$$P(\text{Portadora del virus / Test ha dado positivo}) = \frac{P(\text{Portadora del virus y Test da positivo})}{P(\text{Test ha dado positivo})} =$$

$$= \frac{P(\text{Portadora del virus y Test da positivo})}{P(\text{Portadora del virus y Test da positivo}) + P(\text{No portadora del virus y Test da positivo})} =$$

$$= \frac{0,02 \cdot 0,86}{0,02 \cdot 0,86 + 0,98 \cdot 0,08} = \frac{172}{172+784} = \frac{172}{956} = \boxed{0,18}$$

4A- Supongamos que tenemos una moneda de 2 euros trucada de manera que la probabilidad de que al lanzarla al aire salga cara es el triple de que salga cruz. Calcula razonadamente la probabilidad de que al lanzarla una vez al aire salga cruz.

Si llamamos p a la probabilidad de salir cruz, se cumple que la probabilidad de salir cara es $3p$. La suma de estas probabilidades es 1, se cumple:

$$p + 3p = 1 \Rightarrow 4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

$\boxed{\text{La probabilidad de salir cruz es } \frac{1}{4}}$ y de salir cara es $\frac{3}{4}$.

OTRA FORMA DE HACERLO

Si la probabilidad de que al lanzar la moneda al aire salga cara es el triple de que salga cruz, debe de ocurrir que por cada vez que salga cruz, saldrá tres veces cara. Cada 4 veces que lance la moneda saldrá una sola vez cruz.

$$\text{Probabilidad de sacar cruz (según la regla de Laplace)} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

3B- Se sabe que el tiempo de resolución de los exámenes propuestos por un profesor universitario sigue una distribución normal de media 74 minutos.
a) Si en el primer examen de este curso la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue 8 minutos, ¿cuál es la probabilidad de haber necesitado para resolver el examen más de los 90 minutos disponibles?
b) En el segundo examen la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue de 9 minutos. Si se presentaron 36 alumnos a este segundo examen, determina la probabilidad de que el tiempo medio de resolución de esos alumnos fuera inferior a 77 minutos.

X = Tiempo de resolución de un examen en minutos.

X = N(74, **σ**)

a) X = N(74, 8).

$$P(X>90)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-74}{8}>\frac{90-74}{8}\right)=P(Z>2)=$$

$$=1-P(Z<0,75)=1-0,9772=\boxed{0,0228}$$

b) X = N(74, 9) → $\overline{X_{36}} = N\left(74,\ \frac{9}{\sqrt{36}}\right) \Rightarrow \overline{X_{36}} = N(74,\ 1'5)$

$$P\left(\overline{X_{36}}<77\right)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{\overline{X_{36}}-74}{1,5}<\frac{77-74}{1,5}\right)=P(Z<2)=\boxed{0,9772}$$

4B- Se consideran dos sucesos independientes A y B. Si la probabilidad de que ocurra A es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es $\frac{1}{3}$, calcula la probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B.

$P(A)=0{,}5$ y $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

A y B son independientes → $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot P(B)\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{P(B)}{2}\Rightarrow P(B)=\frac{2}{3}$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{5}{6}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$P(A)=0{,}5$ y $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

A y B son independientes → $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot P(B)\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{P(B)}{2}\Rightarrow P(B)=\frac{2}{3}$$

Construimos una tabla de contingencia:

	B	B^c	
A	1/3		1/2
A^c			
	2/3		1

Completamos la tabla:

	B	B^c	
A	1/3		1/2
A^c	1/3		1/2
	2/3	1/3	1

Pasamos las fracciones a denominador común 6 para que sea más fácil restar y sumar.

	B	B^c	
A	2/6	1/6	3/6
A^c	2/6	1/6	3/6
	4/6	2/6	1

La probabilidad pedida es el valor de color verde situado en la celda de la fila A^c y la columna B^c.

$$P(A^c\cap B^c)=\boxed{\frac{1}{6}}$$