Junio 19

Opción A

1A- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 3x+ay+2z=2 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.
b) Resuelve el sistema para $a=-1$.

a) Las matrices asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & a & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de A vale

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{vmatrix}=6-12+2a-9-4+4a=6a-19$$

Lo igualamos a cero.

$$|A|=0 \Rightarrow 6a-19=0 \Rightarrow 6a=19 \Rightarrow a=\frac{19}{6}$$

Distinguimos dos casos.

CASO 1. $a \neq \frac{19}{6}$.

En este caso el determinante de A es no nulo y por lo tanto su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $a=\frac{19}{6}$.

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 3x+\frac{19}{6}y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 18x+19y+12z=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Ecuación 2ª - 2 · Ecuación 1ª}} \\ 2x & +3y & -4z & =0 \\ -2x & -2y & -2z & =-4 \\ \hline & y & -6z & =-4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Ecuación 3ª - 18 · Ecuación 1ª}} \\ 18x & +19y & +12z & =12 \\ -18x & -18y & -18Z & =-36 \\ \hline & y & -6z & =-24 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ y-6z=-4 \\ y-6z=-24 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrr} y & -6z & =-24 \\ -y & +6z & =4 \\ \hline & 0 & =-20 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ y-6z=-4 \\ 0=-20 \end{cases}$$

Este sistema es incompatible. No tiene solución.

b) Para $a=-1$ el sistema es compatible determinado. Hallemos su solución, utilizando el método de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{12-8-6-8}{-6-19}=\frac{-10}{-25}=\frac{2}{5}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-24+4-8+8}{-6-19}=\frac{-20}{-25}=\frac{4}{5}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{6-4-18-4}{-6-19}=\frac{-20}{-25}=\frac{4}{5}$$

La solución es $x=\frac{2}{5};\quad y=\frac{4}{5};\quad z=\frac{4}{5}$

2A- Un estudio basado en los datos censales sobre la evolución de la población en una ciudad española revela que, en el período 2005-2015, el número de habitantes (en miles) sigue la función

$$p(t)=(t-2)^2(1-2t)+252t+116$$

donde t indica el tiempo medido en años, siendo t = 0 el tiempo correspondiente al año 2005. Tomando $p(t)$, determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de habitantes de dicha ciudad. ¿En qué momento del tiempo el número de habitantes es máximo? ¿Qué número de habitantes tiene la ciudad en ese momento?

Hallamos la derivada de la función y analizamos la evolución del signo de la misma.

$$p(t)=(t-2)^2(1-2t)+252t+116 \Rightarrow p'(t)=2(t-2)(1-2t)+(t-2)^2(-2)+252$$

$$p'(t)=2(t-2t^2-2+4t)+(t^2+4-4t)(-2)+252$$

$$p'(t)=2(-2t^2-2+5t)+(-2t^2-8+8t)+252$$

$$p'(t)=-4t^2-4+10t-2t^2-8+8t+252$$

$$p'(t)=-6t^2+18t+240$$

La igualamos a cero.

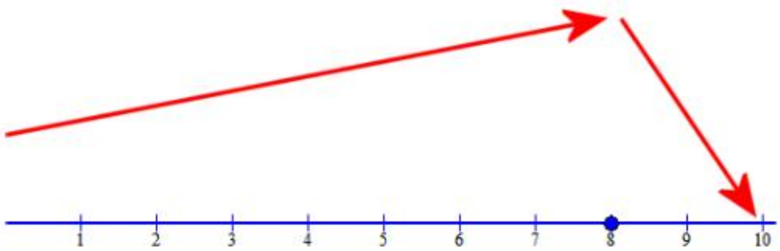
$$p'(t)=0 \Rightarrow -6t^2+18t+240=0 \Rightarrow -t^2+3t+40=0$$

$$t=\frac{-3\pm\sqrt{9+160}}{-2}=\frac{-3\pm 13}{-2}=\begin{cases}=\dfrac{-3+13}{-2}=-5\\[2mm] =\dfrac{-3-13}{-2}=8\end{cases}$$

Esta función solo afecta al periodo 2005-2015, es decir, cuanto $t\in[0,10]$. Rechazamos el valor t $=-5$.

Estudiemos el signo de la derivada antes 8 y después de 8.

- En $(0,8)$ tomamos x = 2 y la derivada vale $p'(2)=-24+36+240=252>0$. El número de habitantes crece.
- En $(8,10)$ tomamos x = 10 y la derivada vale $p'(10)=-600+180+240=-180<0$. El número de habitantes decrece.



La función alcanza un valor máximo en x = 8, es decir, en el año 2013. En ese momento la población es de 1592 mil habitantes, es decir, 1.592.000 habitantes.

$$p(8)=(8-2)^2(1-16)+252\cdot 8+116=36\cdot(-15)+252\cdot 8+116=1592$$

3A- Las autoridades sanitarias están estudiando los efectos del tabaco en la salud. El tiempo que tarda un fumador en dejar definitivamente de fumar se ajusta a una distribución normal, de media 5 meses y desviación típica 2 meses. Con esta información:
a) Calcula la probabilidad de que un fumador tarde más de 4 meses en dejar definitivamente de fumar? **(1 punto).**
b) Si se toman 50 fumadores, calcula la probabilidad de que el tiempo medio que tardan los 50 fumadores en dejar definitivamente de fumar sea inferior a 6 meses. **(2 puntos)**

X = Tiempo en meses que un fumador tarda en dejar definitivamente de fumar.
X = N(5, 2)

a)

$$P(X>4)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-5}{2}>\frac{4-5}{2}\right)=P(Z>-0,5)=$$
$$=P(Z\leq 0,5)=\boxed{0,6915}$$

b) N = 50 → $\overline{X_{50}}=N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\Rightarrow\overline{X_{50}}=N\left(5,\frac{2}{\sqrt{50}}\right)\Rightarrow\overline{X_{50}}=N\left(5,\frac{2}{\sqrt{50}}\right)$

$$P(\overline{X_{50}}<6)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{\overline{X_{50}}-5}{2/\sqrt{50}}<\frac{6-5}{\frac{2}{\sqrt{50}}}\right)=P(Z<3,54)=\boxed{0,9998}$$

4A- La ficha técnica del estudio social "*Influencers* en redes sociales" indica que se ha encuestado a 1096 individuos de 16 a 55 años de edad residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que se declaran seguidores de *influencers* es de ±3% con un nivel de confianza del 95.5 %.
Para esta ficha técnica, identifica los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

n = 1096

E = ±0,03

$\propto$=0,955

Población: Individuos de 16 a 55 años residentes en España.

Diseño muestral: Muestra estratificada con muestreo aleatorio simple por estratos.

Tamaño muestral: 1096

Parámetro estudiado: Proporción de individuos seguidores de Influencers.

Opción B

1B- Una familia de 3 miembros recibe la devolución de los impuestos abonados en la campaña RENTA2017 por un importe total de 3250 €. Sabiendo que la madre recibe el doble que el hijo y que el padre recibe $\frac{2}{3}$ de lo que recibe la madre, calcula el importe de la devolución que recibe cada miembro de la familia.

Es un problema que se resuelve con un sistema de ecuaciones, busquemos las ecuaciones que componen el sistema.
Llamemos x = dinero que recibe el hijo; y = dinero que recibe la madre; z = dinero que recibe el padre.

- La madre recibe el doble que el hijo → $y = 2x$.
- El padre recibe $\frac{2}{3}$ de lo que recibe la madre → $z = \frac{2}{3}y$
- El importe de la devolución es 3250 € → $x + y + z = 3250$

Resumiendo:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ z = \frac{2}{3}y \\ x + y + z = 3250 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z = \frac{2}{3}2x \\ x + 2x + z = 3250 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z = \frac{4}{3}x \\ x + 2x + z = 3250 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 2x + \frac{4}{3}x = 3250 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 6x + 4x = 9750 \Rightarrow 13x = 9750 \Rightarrow \boxed{x = \frac{9750}{13} = 750}$$

$$\boxed{z = \frac{4}{3}750 = 1000} \Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 750 = 1500}$$

El hijo recibe 750 €, la madre 1500 € y el padre 1000 €.

2B- La producción de petróleo (millones de barriles) de un pozo petrolífero a lo largo del tiempo x (años) se mide según la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} 17x & si \quad 0\le x<5 \\ -3x^2+30x+10 & si \quad 5\le x<10 \\ 10 & si \quad x\ge 10 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función $f(x)$. ¿Cuántos barriles de petróleo produce dicho pozo cuando $x=8$?
b) Calcula el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo [2,3].

a) La función es continua cuando lo es en x = 5 y en x =10.

En x =5 debe cumplirse:
- Existe $f(5)=-75+150+10=85$
- Existe $\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-} 17x=85$
- Existe $\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+}\left(-3x^2+30x+10\right)=-75+150+10=85$
- Los tres valores son iguales.

Todo se cumple, luego la función es continua en x = 5.

En x = 10 debe cumplirse
- Existe $f(10)=10$
- Existe $\lim_{x\to 10^-} f(x)=\lim_{x\to 10^-} -3x^2+30x+10=-300+300+10=10$
- Existe $\lim_{x\to 10^+} f(x)=\lim_{x\to 10^+} 10=10$
- Los tres valores son iguales.

Todo se cumple, luego la función es continua en x = 10.

¿Cuántos barriles de petróleo produce dicho pozo cuándo $x=8$?

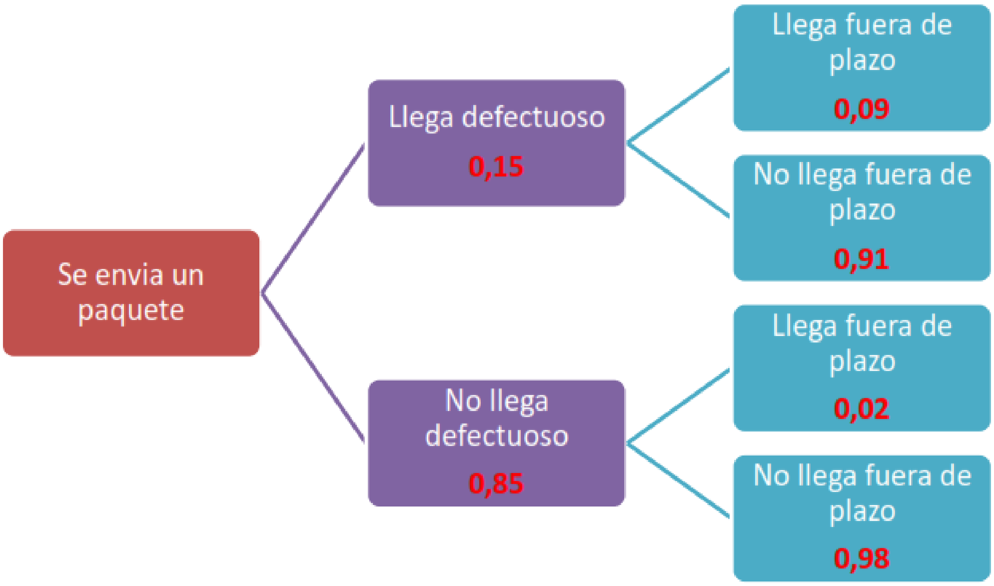
$f(8)=-3\cdot 64+240+10=-192+250=58\ \textit{millones de barriles}$

b) Entre 2 y 3 la función es una recta $f(x)=17x$.
El área será el valor de la integral definida:
$$\int_2^3 17x\,dx=\left[17\frac{x^2}{2}\right]_2^3=\left[17\frac{3^2}{2}\right]-\left[17\frac{2^2}{2}\right]=\frac{153}{2}-34=\frac{85}{2}=42,5$$

El área es de 42,5 u^2

3B- El 15% de los paquetes repartidos por una empresa de transporte llegan defectuosos. Entre los paquetes que llegan defectuosos un 9% llega fuera de plazo, mientras que entre los no defectuosos sólo un 2 % llega fuera de plazo. Se elige un paquete al azar repartido por esta empresa:
a) Calcula la probabilidad de que el paquete elegido llegue fuera de plazo.
b) Sabiendo que el paquete elegido llega fuera de plazo, ¿qué probabilidad hay de que llegue defectuoso?

Realicemos un diagrama de árbol con los datos del problema.



a)

$$P(\text{Llega fuera de plazo}) = P(\text{Llega defectuoso})\,P(\text{Llega fuera de plazo/ Llega defectuoso}) +$$
$$+P(\text{No llega defectuoso})\,P(\text{Llega fuera de plazo/ No llega defectuoso}) =$$
$$= 0{,}15 \cdot 0{,}09 + 0{,}85 \cdot 0{,}02 = \boxed{0{,}0305}$$

b)

$$P(\text{Llega defectuoso /Llega fuera de plazo}) = \frac{P(\text{Llega defectuoso y fuera de plazo})}{P(\text{Llega fuera de plazo})} =$$
$$= \frac{0{,}15 \cdot 0{,}09}{0{,}0305} = \boxed{0{,}443}$$

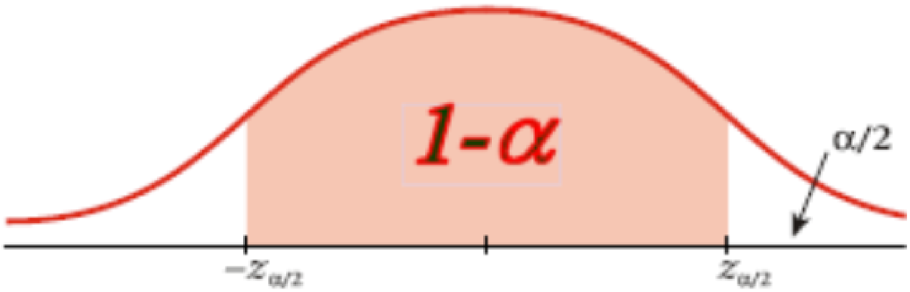
4B- En el aeropuerto A, se toma una muestra de 100 días y se observa que en 25 hay saturación aérea. Con esos datos, se calculan dos intervalos de confianza para el parámetro proporción de días con saturación aérea en el aeropuerto A: [0.122, 0.378] y [0.165, 0.335]
¿Cuál es el intervalo de menor confianza? Justifica tu respuesta.

X = Proporción de días con saturación aérea en el aeropuerto A.

La amplitud del intervalo [0.122, 0.378] es $A_1 = \frac{0,378-0,122}{2} = \frac{0,256}{2} = 0,128$. El error en este intervalo de confianza es $E_1 = \frac{0,128}{2} = 0,064$

La amplitud del intervalo [0.165, 0.335] es $A_2 = \frac{0,335-0,165}{2} = \frac{0,170}{2} = 0,085$. El error en este intervalo de confianza es $E_2 = \frac{0,085}{2} = 0,0425$

Dada la imagen:



Si el nivel de confianza es mayor $(1-\alpha)$ entonces el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es mayor y el error cuya fórmula es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$ será mayor. Siendo p, q y n valores iguales.

A mayor amplitud del intervalo mayor nivel de confianza.

Por lo tanto el intervalo [0.165, 0.335] tiene menor amplitud y por tanto menor confianza.