# Junio 17

**Opción A**

**1A-** Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real $a$:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y + z = 3 \\ \quad y - az = 2 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de $a$.
b) Resuelve el sistema para $a = 2$.

a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = a - 2a - 1 = -a - 1$$

Igualamos a cero.

$|A| = 0 \Rightarrow -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

Existen dos casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y por tanto el rango de A es 3, asi como el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución. El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a = -1$

En este caso el sistema queda:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y + z = 3 \\ \quad y + z = 2 \end{cases} \text{ y la matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene determinante nulo y su rango es menor de 3.
Veamos si su rango es 2.

Extraemos el menor resultante de quitar la 1ª fila y columna → $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$

El rango de A es 2

Veamos el rango de A/B.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

¿Rango de A/B es 3? Tomamos el menor resultante de quitar la 1ª columna.

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 1 + 3 = 3 \neq 0$ . El rango de A/B es 3.

Como el rango de A y el de A/B son distintos el sistema no tiene solución.
El sistema es incompatible.

b) Para a = 2 el sistema es compatible determinado (CASO 1) y lo resolvemos por Gauss.

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x-y+z=3 \\ y-2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ 2x-y+z=3 \\ y-2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(y-1)-y+z=3 \\ y-2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-2-y+z=3 \\ y-2z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+z=5 \\ y-2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-z+5 \\ y-2z=2 \end{cases} \Rightarrow -z+5-2z=2 \Rightarrow -3z=-3 \Rightarrow \boxed{z=1}$$

$$y=-1+5=4 \Rightarrow x=4-1=3$$

La solución es x = 3; y = 4; z = 1.

**2A-** La función:

$$f(x)=\begin{cases} 20x^2-20x+32 & 0<x\le 1 \\ \dfrac{90x-45}{x+8}+27 & x>1 \end{cases}$$

representa el beneficio, en miles de euros, de cierta empresa transcurridos x meses.
a) Estudia razonadamente la continuidad de la función *f(x)*.
b) Halla los intervalos donde se produce un aumento del beneficio y una disminución del beneficio. ¿En qué momento el beneficio es mínimo?
c) Determina el beneficio de la empresa a muy largo plazo.

a) Para $0<x\le 1$ la función es un polinomio de grado dos. Es continua
Para x>1 la función es una fracción que es continua salvo en los puntos que anulan el denominador. Esto ocurre para x = –8 , que no está en los valores para los que se define la función.
La función es continua para todo su dominio, aunque falta comprobar su continuidad en el cambio de definición, para x = 1.

- Existe $f(1)=20\cdot 1^2-20+32=32$
- Existe $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 20x^2-20x+32=32$
- Existe $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} \dfrac{90x-45}{x+8}+27=\dfrac{90-45}{1+8}+27=5+27=32$
- Los tres valores son iguales.

La función es continua.

b) Estudiemos la variación de la función usando su derivada.

$$f(x)=\begin{cases} 20x^2-20x+32 & 0<x\le 1 \\ \dfrac{90x-45}{x+8}+27 & x>1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 40x-20 & 0<x<1 \\ \dfrac{90(x+8)-(90x-45)}{(x+8)^2}=\dfrac{765}{(x+8)^2} & x>1 \end{cases}$$

Igualamos a cero la derivada.

$$\begin{cases} 40x-20=0 \Rightarrow x=\dfrac{20}{40}=0,5 \\ \dfrac{765}{(x+8)^2}=0 \Rightarrow \text{No es posible} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada de 0 a 0,5, luego de 0,5 a 1 y por ultimo a partir de 1.

En $(0,0,5)$ tomamos x = 0,25 y la derivada vale $f'(0,25)=40\cdot 0,25-20=10-20=-10<0$.
La función decrece.

En $(0,5,1)$ tomamos x = 0,75 y la derivada vale $f'(0,75)=40\cdot 0,75-20=30-20=10>0$.
La función crece.

En $(1,+\infty)$ tomamos x = 2 y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{765}{(2+8)^2}=7,65>0$. La función crece.

Resumiendo: El beneficio disminuye en $(0,0,5)$, es decir, de 0 a medio mes. Aumenta a partir de entonces, durante el resto del tiempo, es decir en $(0,5,+\infty)$.
El valor mínimo se alcanza al cabo de medio mes.

c) El beneficio de la empresa a largo plazo es el valor del límite de la función beneficio cuando el número de meses se acerca al infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{90x-45}{x+8}+27=\lim_{x\to+\infty}\frac{90x-45+27x+216}{x+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{117x+171}{x+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{117x}{x}=117$$

A muy largo plazo el beneficio de la empresa se acerca a 117000 €

**3A-** La lista electoral de un determinado partido político está formada por un número igual de hombres y mujeres. Un análisis sociológico de dichas listas revela que el 60% de los hombres tienen 40 o más años de edad, mientras que el 30% de las mujeres tienen menos de 40 años. Se elige al azar una persona que forma parte de las listas electorales.
a) Calcula la probabilidad de que tenga menos de 40 años.
b) Sabiendo que tiene 40 o más años de edad, calcula la probabilidad de que sea mujer.

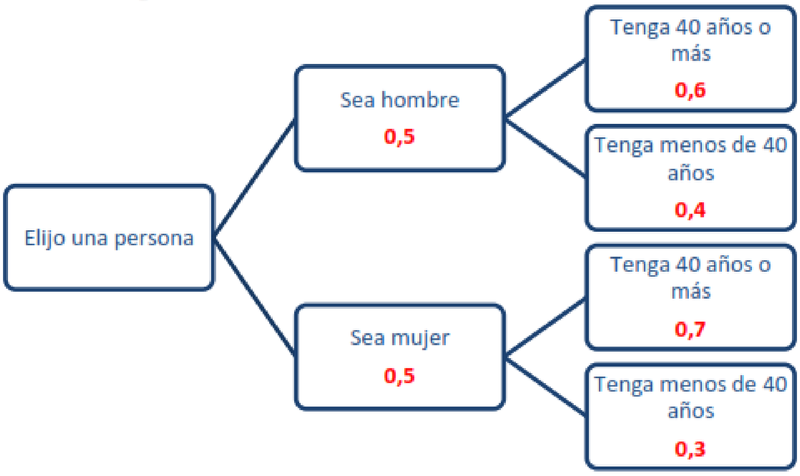
Podemos hacer un cálculo sencillo de la probabilidad pasando todo a valores absolutos.
Supongamos que hay 200 integrantes en el partido político en cuestión (suponemos esta cantidad por lo fácil que será para el resto de cálculos).
100 son mujeres y 100 son hombres. De los 100 hombres 60 tienen 40 o más años de edad y 40 hombres tienen menos de 30 años. De las mujeres 70 tienen 40 o más años y 30 tienen menos de 30 años.

a) $P(\text{Tenga menos de 40 años}) = \dfrac{40+30}{200} = \dfrac{70}{200} = \boxed{0,35}$

b) $P(\text{Sea mujer / Tiene más de 40 años}) = \dfrac{70}{60+70} = \dfrac{70}{130} = \dfrac{7}{13} = \boxed{0,538}$

OTRA FORMA DE HACERLO

Realicemos un diagrama de árbol




a)

$$P(\text{Tenga menos de 40 años}) =$$
$$= P(\text{Es hombre})P(\text{Tenga menos de 40 años/ Es hombre}) +$$
$$+ P(\text{Es mujer})P(\text{Tenga menos de 40 años / Es mujer}) =$$
$$= 0,5 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,3 = \boxed{0,35}$$

b)

$$P(\text{Sea mujer / Tiene más de 40 años}) = \frac{P(\text{Sea mujer y Tiene más de 40 años})}{P(\text{Tiene más de 40 años})} =$$
$$= \frac{P(\text{Sea mujer})P(\text{Tiene más de 40 años / Sea mujer})}{1 - P(\text{Tiene menos de 40 años})} = \frac{0,5 \cdot 0,7}{1-0,35} = \frac{0,35}{0,65} = \frac{35}{65} = \frac{7}{13} = \boxed{0,538}$$

**4A-** El diámetro de las piezas fabricadas por cierta máquina sigue una distribución normal con desviación típica poblacional σ = 0.042 cm. Se elige una muestra representativa de 200 piezas fabricadas por la máquina, resultando un diámetro medio muestral de 0.824 cm. Halla el intervalo de confianza al 95% para el diámetro medio poblacional de las piezas fabricadas por esa máquina.

X = Diámetro de las piezas fabricadas por cierta máquina.

Sabemos que $X = N(\mu, 0{,}042)$

Para establecer el intervalo de confianza utilizamos la fórmula $\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right)$, siendo

$Error = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

n = 200, $\bar{x}$ = 0,824 cm, σ = 0,042

Como 1 – ∝ = 0'95 → ∝ = 0'05 → ∝/2 = 0'025 → 1– ∝/2 = 0'975 → $z_{\alpha/2}$ = **1,96**

El error sería $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}042}{\sqrt{200}} = 0{,}006$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - E, \bar{x} + E\right) = \left(0{,}824 - 0{,}006, 0{,}824 + 0{,}006\right) = \left(0{,}818, \quad 0{,}830\right)$$

$$\boxed{\text{Intervalo de confianza} = \left(0{,}818, \quad 0{,}830\right)}$$

**Opción B**

**1B-** Queremos conseguir al menos 210 kg de hidratos de carbono y al menos 100 kg de proteínas adquiriendo dos alimentos A y B que sólo contienen estos dos nutrientes. Cada kg de A contiene 0.6 kg de hidratos de carbono y 0.4 kg de proteínas. Cada kg de B contiene 0.9 kg de hidratos de carbono y 0.1 kg de proteínas. Si los costes de A y B son 12 y 6 euros por kg, respectivamente, utiliza técnicas de programación lineal para calcular cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para que el coste sea mínimo. ¿A cuánto asciende ese coste mínimo?

Llamemos x = número de kilos de nutriente A. y = número de kilos de nutriente B.
Expresamos los condicionantes del ejercicio en una tabla.

| | Nutriente A | Nutriente B | Total |
|---|---|---|---|
| Kgs de nutriente | x | y | |
| Kgs de hidratos de carbono | 0,6x | 0,9y | 0,6x + 0,9y |
| Kgs de proteínas | 0,4x | 0,1y | 0,4x + 0,1y |
| Coste | 12x | 6y | 12x + 6y |

Establezcamos las restricciones que nos proporciona el ejercicio.

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0,6x + 0,9y \geq 210 \\ 0,4x + 0,1y \geq 100 \end{array}\right\}$$

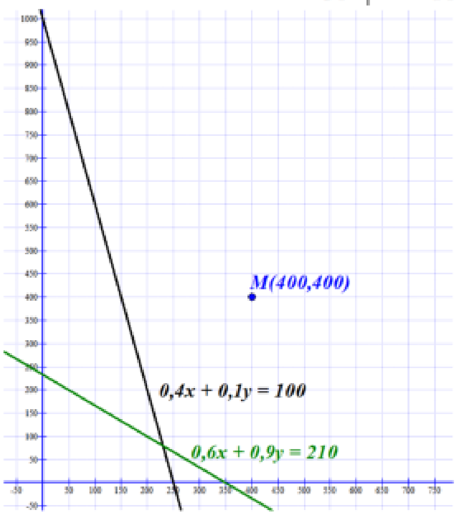
Dibujamos la región del plano que cumple estas restricciones. Para ello dibujo las rectas asociadas a cada desigualdad.

$$0,6x + 0,9y = 210 \Rightarrow 6x + 9y = 2100 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x + 3y = 700 \Rightarrow y = \frac{700-2x}{3}$$

| $x$ | $y = \frac{700-2x}{3}$ |
|---|---|
| 200 | 100 |
| 50 | 200 |
| 350 | 0 |

$$0,4x + 0,1y = 100 \Rightarrow 4x + y = 1000 \Rightarrow y = 1000 - 4x$$

| $x$ | $y = 1000 - 4x$ |
|---|---|
| 0 | 1000 |
| 200 | 200 |
| 50 | 800 |



Probamos en las restricciones el punto M(400, 400)

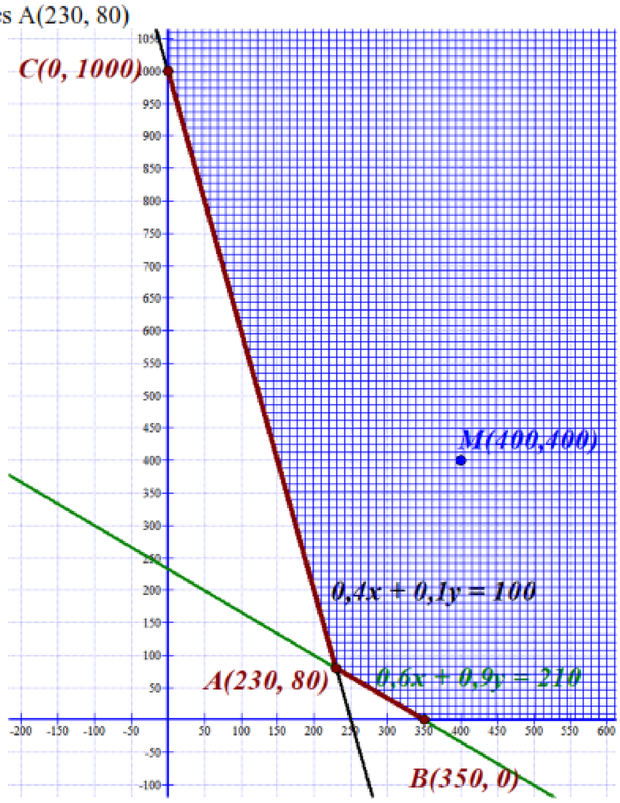
$$\left.\begin{array}{l} 400 \geq 0 \\ 400 \geq 0 \\ 0,6 \cdot 400 + 0,9 \cdot 400 \geq 210 \\ 0,4 \cdot 400 + 0,1 \cdot 400 \geq 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 400 \geq 0;\ \text{Si es cierto} \\ 400 \geq 0;\ \text{Si es cierto} \\ 240 + 360 \geq 210;\ \text{Si es cierto} \\ 160 + 40 \geq 100;\ \text{Si es cierto} \end{array}\right\}$$

La región factible es la que contiene al punto M y limitada por los ejes de coordenadas y las dos rectas dibujadas.
El punto de corte entre ambas rectas lo obtenemos resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 0,6x + 0,9y = 210 \\ 0,4x + 0,1y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{700 - 2x}{3} \\ y = 1000 - 4x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{700 - 2x}{3} = 1000 - 4x \Rightarrow$$

$$700 - 2x = 3000 - 12x \Rightarrow 10x = 2300 \Rightarrow x = 230 \Rightarrow y = 1000 - 4 \cdot 230 = 80$$

El punto de corte es A(230, 80)




Valoramos la función Coste $f(x, y) = 12x + 6y$ en cada uno de estos vértices:

A(230, 80) → $f(230, 80) = 12 \cdot 230 + 6 \cdot 80 = 3240$

B(350, 0) → $f(350, 0) = 12 \cdot 350 + 0 = 4200$

C(0, 1000) → $f(0, 1000) = 0 + 6000 = 6000$

El coste mínimo se obtiene en el punto A(230, 80). Significa 230 kg del nutriente A y 80 kg del nutriente B con un coste de 3240 €.

**2B-**

a) Calcula el valor de $a$ que hace que el valor de la derivada de la función $y = ax^3 + 6x^2 - ax - 18$, en los puntos de abscisa x = –2 y x = 1, sean iguales.

b) Sabiendo que la curva $y = ax^3 + 6x^2 - ax - 18$ pasa por el punto (2, 12), calcula el valor de $a$ y las coordenadas del punto de la curva donde se anula la segunda derivada.

a) La derivada de $y = ax^3 + 6x^2 - ax - 18$ es $y' = 3ax^2 + 12x - a$.

La derivada en x = –2 vale $y' = 3a(-2)^2 + 12(-2) - a = 12a - 24 - a = 11a - 24$

La derivada en x = 1 vale $y' = 3a + 12 - a = 2a + 12$

Como deben ser iguales, debe cumplirse: $2a + 12 = 11a - 24 \Rightarrow 36 = 9a \Rightarrow a = \frac{36}{9} = 4$

El valor de $a$ es 4

b)

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^3 + 6x^2 - ax - 18 \\ Pasa\ por\ (2,12) \end{array}\right\} \Rightarrow 12 = a \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 2a - 18 \Rightarrow 12 = 8a + 24 - 2a - 18$$

$$6 = 6a \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Para a = 1 la derivada de $y = x^3 + 6x^2 - x - 18$ es $y' = 3x^2 + 12x - 1$. La segunda derivada es $y'' = 6x + 12$.

Esta segunda derivada se anula cuando $y'' = 0 \Rightarrow 6x + 12 = 0 \Rightarrow 6x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{6} = -2$

Si x = –2 entonces $y = (-2)^3 + 6(-2)^2 - (-2) - 18 = -8 + 24 + 2 - 18 = 0$.

Las coordenadas del punto de la curva donde se anula la segunda derivada son (–2, 0).

**3B-** El gasto por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con media μ euros (desconocida) y desviación típica σ = 10 euros. Se elige una muestra representativa de 225 clientes, resultando una suma total de sus gastos de 2587.50 euros.
a) Determina un intervalo de confianza del 99% para el gasto medio por cliente.
b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra de clientes que permita alcanzar, con una confianza del 95%, un error máximo de 1.20 euros en la estimación del gasto medio por cliente.

X = Gasto por cliente en un supermercado.

Sabemos que $X = N(\mu, 10)$

a) Para establecer el intervalo de confianza utilizamos la fórmula $\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right)$,

siendo $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

n = 225, $\bar{x}$ = 2587,5 €, $\sigma = 10$ €
Como el nivel de confianza es del 99%

1 – ∝ = 0’99 → ∝ = 0’01 → ∝/2 = 0’005 → 1– ∝/2 =0’995 → $z_{\alpha/2} = \frac{2,57+2,58}{2} = 2,575$

El error sería $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \cdot \frac{10}{\sqrt{225}} = 2,575 \cdot \frac{10}{15} = 1,716$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - E, \bar{x} + E\right) = (2587,5 - 1,716,\ \ 2587,5 + 1,716) =$$

$$\boxed{\text{Intervalo de confianza} = (2585,78, \quad 2589,22)}$$

b) Como 1 – ∝ = 0’95 → ∝ = 0’05 → ∝/2 = 0’025 → 1– ∝/2 =0’975 → $z_{\alpha/2}$ = **1,96**

Un error máximo de 1,2 € lo sustituimos en la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,2 \Rightarrow 1,96 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 1,2 \Rightarrow 1,96 \cdot \frac{10}{1,2} = \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(1,96 \cdot \frac{10}{1,2}\right)^2 = 266,777$$

El tamaño mínimo es de 267 clientes.

**4B-** En una clase con 15 alumnos de segundo de bachillerato, 2 alumnos están jugando al mus y 5 están jugando al tute, mientras que el resto de alumnos no está jugando a las cartas. Si se eligen al azar dos alumnos, ¿qué probabilidad hay de que ninguno de los elegidos estén jugando a las cartas?

Son 7 los alumnos que juegan a las cartas y 8 los que no juegan a las cartas.

$P(\text{Ninguno de los 2 alumnos esté jugando a las cartas}) =$

$= P(\text{El primer elegido no esté jugando a las cartas}) \cdot$

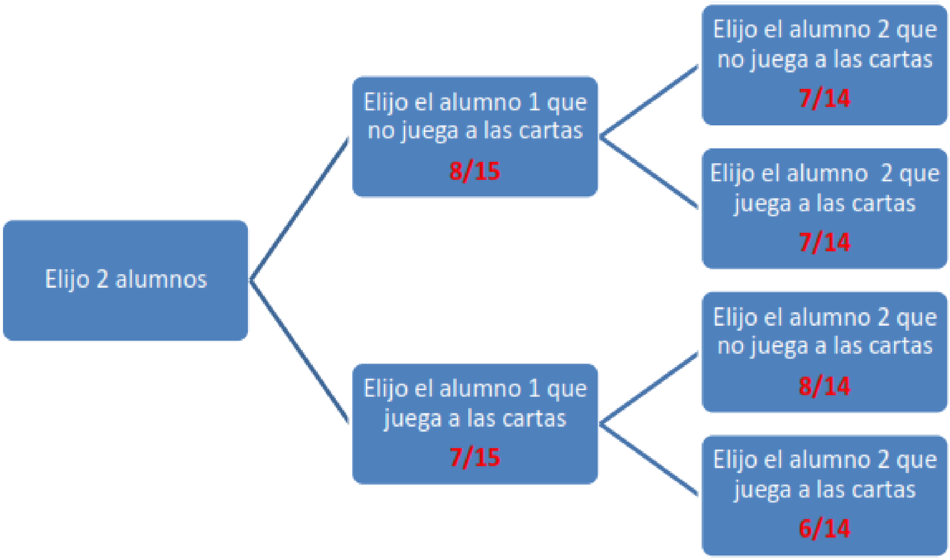
$\cdot P(\text{El 2º elegido no esté jugando a las cartas / El 1º no juega a las cartas}) =$

$= \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} = \boxed{0,266}$

OTRA FORMA DE HACERLO

Son 7 los alumnos que juegan a las cartas y 8 los que no juegan a las cartas.

Hacemos un diagrama de árbol




$P(\text{Ninguno de los 2 alumnos esté jugando a las cartas}) =$

$= P(\text{No juegue el alumno 1 a las cartas}) \cdot$

$\cdot P(\text{No juegue el alumno 2 a las cartas/ El alumno 1 no juega a las cartas}) =$

$= \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} = \boxed{0,266}$