Junio 2015

OPCIÓN A

1. Se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + az = 8 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según sus posibles soluciones, para los distintos valores de a.
b) Resuelve el sistema para $a = 4$.

Solución:

a) Consideremos la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada $\overline{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array}\right)$$

Estudiemos los rangos de estas matrices. Se tiene que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a + 8 + 6 - 4 + 6a + 4 = 8a + 14$$

Dicho determinante se anula para $a = -\dfrac{14}{8} = -\dfrac{7}{4}$. Por tanto:

- Si $a \neq -\dfrac{7}{4} \Rightarrow$ rango A = rango $\overline{A}$ = 3 = nº incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$ Solución única.

- Si $a = -\dfrac{7}{4} \Rightarrow$ rango A = 2, ya que podemos encontrar un menor de orden dos no nulo en ella, por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8 \neq 0$. Además, orlando dicho menor con los elementos de la última fila y la columna de los términos independientes, se tiene que: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 12 + 0 - 0 + 48 - 6 = 46 \neq 0$ y por tanto rango $\overline{A}$ = 3.

Así, como rango $A = 2 \neq 3 =$ rango $\overline{A}$ $\Rightarrow$ S.I. $\Rightarrow$ No tiene solución.

b) Vamos a resolverlo para el caso a = 4, para el cual el sistema es compatible determinado, utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 2f_1]{f_2 \to f_2 - 3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to 4f_3 - 3f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 23 & 23 \end{array}\right)$$

Despejando z de la última ecuación se obtiene que z = 1. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación, se llega a que y = 1. Finalmente, sustituyendo los valores obtenidos para y y z en la primera ecuación, se llega a que x = 1.

Otra forma de obtener la solución para a = 4 es mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{46}{46} = 1 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{46}{46} = 1 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{46}{46} = 1$$

2. Un estudio realizado por una agencia especializada revela que el número de votantes censados en una comunidad autónoma española viene determinado, en millones de personas, por la función $f(t) = \dfrac{(t+10)^2 + 15}{(t+11)^2}$, donde t es el tiempo en años transcurridos desde el inicio del estudio, el 1 de enero de 1990.

a) Calcula el número mínimo de votantes censados. ¿En qué año se alcanza ese mínimo?

b) Calcula el número de votantes censados que tendrá dicha comunidad a muy largo plazo.

Solución:

a) Para estudiar el número mínimo de votantes censados, calculemos la derivada primera:

$$f'(t) = \frac{2(t+10)\cdot(t+11)^2 - ((t+10)^2 + 15)\cdot 2(t+11)}{(t+11)^4} = \frac{2t-10}{(t+11)^3}$$

Obtengamos a continuación los puntos singulares ($f'(x) = 0$):

$$f'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2t-10}{(t+11)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 5$$

Se tiene entonces que los signos que toma la derivada primera en los distintos intervalos en que queda dividido el dominio de definición de $f(t)$ por los puntos singulares son:

Como se puede observar fácilmente en la figura anterior, en $t = 5$, la función pasa de ser decreciente ($f'(t) < 0$) a ser creciente ($f'(t) > 0$) y por tanto en él hay un mínimo. Por tanto, el número mínimo de votantes censados se alcanza a los 5 años del inicio del estudio. Su número viene dado por:

$$f(5) = \frac{(5+10)^2+15}{(5+11)^2} = \frac{240}{256} = 0,9375 \quad \Rightarrow \quad 9.375.000 \text{ votantes censados}$$

b) Para responder a esta pregunta, debemos calcular el valor al que se aproxima $f(t)$ cuando ha pasado mucho tiempo, es decir:

$$\underset{x\to+\infty}{Lim} f(t) = \underset{x\to+\infty}{Lim} \frac{(t+10)^2+15}{(t+11)^2} = 1$$

Por tanto el número de votantes censados de esa comunidad a largo plazo será de 1.000.000.

3. Una panadería elabora magdalenas caseras cuyos pesos siguen una distribución normal con media 40 gramos y desviación típica 5 gramos.
a) Calcula el porcentaje de magdalenas que pesan más de 43 gramos.
b) Las magdalenas se empaquetan en bolsas de 20 magdalenas para su venta. El panadero considera aceptable una bolsa cuando su peso no supera los 820 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que una bolsa no sea aceptable?

Solución:

a) Consideremos la variable aleatoria X que asigna a cada magdalena su peso, en gramos. Dicha variable sigue una distribución:

$$X \sim N(40, 5)$$

Nos piden calcular el porcentaje de magdalenas que pesan más de 43 gramos, que podemos obtener a través de $P(X > 43)$:

$$P(X > 43) = P\left(Z > \frac{43-40}{5}\right) = P(Z > 0,6) = 1 - P(Z \leq 0,6) = 1 - 0,7257 = 0,2743$$

Por tanto el porcentaje de magdalenas que superan los 43 gramos es del 27,43 %.

b) Si se empaquetan las magdalenas en bolsas de 20 magdalenas, entonces el peso de cada bolsa, T, seguirá un distribución normal (por seguir el peso de las magdalenas una distribución normal) de parámetros:

$$T \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n}) = N(40 \cdot 20, 5 \cdot \sqrt{20}) = N(800, 22,36)$$

Entonces, como una bolsa no es aceptable si su peso supera los 820 gramos, tenemos que:

$$P\,(T > 820) = P\left(Z > \frac{820-800}{22{,}36}\right) = P\,(Z > 0.89) = 1 - P\,(Z \leq 0{,}89) = 1 - 0{,}8133 = 0{,}1867$$

Por tanto, la probabilidad de que una bolsa no sea aceptable es 0,1867.

4. En una localidad llueve en 73 de los 365 días del año. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva más de 2 días en una semana cualquiera?

Solución:

Consideremos la variable aleatoria X que cuenta el número de días que llueve en una semana. Dicha variable sigue una distribución binomial de parámetros:

$$X \sim B\left(7, \frac{73}{365}\right) = B\,(7,\, 0{,}2)$$

Entonces, la probabilidad pedida viene dada por:

$$P\,(X > 2) = 1 - P\,(X \leq 2) = 1 - [P\,(X = 0) + P\,(X = 1) + P\,(X = 2)] =$$

$$= 1 - (0{,}2097 + 0{,}3670 + 0{,}\ 2753) = 1 - 0{,}8520 = 0{,}1480$$

OPCIÓN B

1. Un comercio dispone de 60 unidades de un producto A por el que obtiene un beneficio por cada unidad que vende de 250 €. También dispone de 70 unidades de otro producto B por el que obtiene un beneficio por unidad vendida de 300 €. El comercio puede vender como máximo 100 unidades de sus productos. Utilizando técnicas de programación lineal, determina las unidades de los productos A y B que el comercio debe vender para que su beneficio sea máximo y calcula dicho beneficio.

Solución:

Sea x el número de unidades de producto A vendidas y sea y el número de unidades de producto B vendidas. A partir de los datos del problema podemos plantear las siguientes restricciones:

Límite en la cantidad de unidades de producto A disponibles $\Rightarrow \quad x \leq 60$
Límite en la cantidad de unidades de producto B disponibles $\Rightarrow \quad y \leq 70$
Límite en la cantidad de unidades que puede vender cada día $\Rightarrow \quad x + y \leq 100$
Definición de la variables $\Rightarrow \quad x \geq 0$ e $y \geq 0$

La función a maximizar, que nos da el beneficio obtenido es: $F(x, y) = 250x + 300y$

Representemos la región factible:

Los vértices de esta región son:

$$O = (0, 0) \qquad A = (60, 0) \qquad B = (60, 40) \qquad C = (30, 70) \qquad D = (0, 70)$$

Veamos en cual de ellos se presenta el máximo de la función de beneficios:

$F(0, 0) = 250 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0$
$F(60, 0) = 250 \cdot 60 + 300 \cdot 0 = 15000$
$F(60, 40) = 250 \cdot 60 + 300 \cdot 40 = 27000$
$F(30, 70) = 250 \cdot 30 + 300 \cdot 70 = 285000$
$F(0, 70) = 250 \cdot 0 + 300 \cdot 70 = 21000$

Por tanto, el máximo se presenta cuando se venden 30 unidades del producto A y 70 unidades del producto B, ascendiendo en ese caso el beneficio a 28500 euros.

2. Se considera la función $f(x) = x^2 + ax + b$.
a) Determina los valores de a y b sabiendo que la función $f(x)$ tiene un mínimo en $x = 2$ y que su gráfica pasa por el punto $(2, -2)$.
b) Para $a = -4$ y $b = 6$ calcula el valor de la función $f(x)$ en el punto $x = -1$ y represéntala gráficamente.

Solución:

a) Para calcular los coeficientes a y b, tengamos en cuenta que la función $f(x)$ tiene un mínimo en el punto de abscisa $x = 2$, y que su gráfica pasa por el punto $(2, -2)$. Por tanto, ha de cumplirse que:

- En el punto de abscisa $x = 2$, $f'(x)$ se anula, pues es un punto singular, $f'(2) = 0$
- La gráfica de la función pasa por el punto $(2, -2)$, esto es: $f(2) = -2$

Así, obtenemos:

- Primero: $f'(x) = 2x + a \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -4$
- Segundo: $f(2) = -2 \quad \Rightarrow \quad 4 + 2a + b = -2 \quad \Rightarrow \quad 2a + b = -6$

Se obtiene entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases} a = -4 \\ 2a + b = -6 \end{cases}$

Resolviéndolo se obtiene: $a = -4$ y $b = 2$. Por tanto la función es: $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

b) Tenemos que $f(x) = x^2 - 4x + 6$. Así pues:

$$f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 6 = 1 + 4 + 6 = 11$$

Para representarla, como se trata de una función polinómica de segundo grado, cuya representación gráfica es una parábola con las ramas dirigidas hacia arriba (por ser el coeficiente del término de mayor grado positivo), además del vértice, que es el punto $(2, -2)$, calculemos los puntos de corte con los ejes.

- Cortes con el eje X ($y = 0$):

$$x^2 - 4x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{No tiene raíces reales} \quad \Rightarrow \quad \text{No corta al eje } X$$

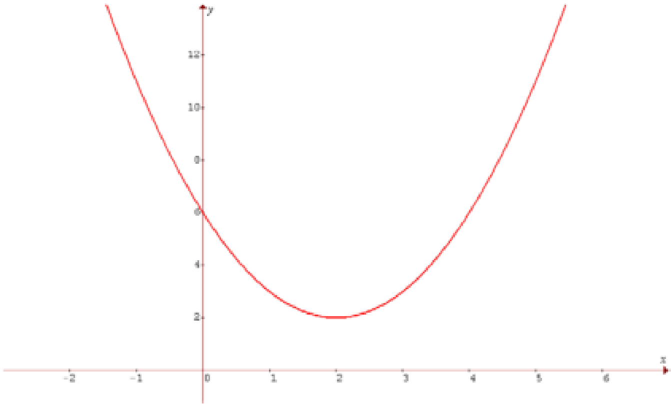
- Cortes con el eje Y ($x = 0$):

$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 6 = 6$$

Por tanto el único punto de corte con los ejes es $(0, 6)$.

Si quisiéramos tener algún punto más para hacer la representación podríamos hacer una tabla de valores. Con ello se obtiene la siguiente representación:

x	y
1	3
3	3
4	6



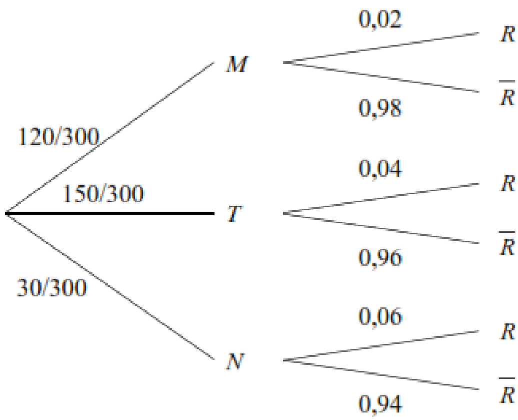
3. El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es 120, por la tarde 150 y por la noche 30. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2 %, por la tarde del 4 % y por la noche de un 6 %.
a) Calcula la probabilidad de que se retrase un vuelo con destino a este aeropuerto.
b) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo nocturno?

Solución:

En primer lugar, consideremos los siguientes sucesos:

M: "el vuelo llega al aeropuerto por la mañana"
T: "el vuelo llega al aeropuerto por la tarde"
N: "el vuelo llega al aeropuerto por la noche"
R: "el vuelo llega con retraso"
$\overline{R}$: "el vuelo no llega con retraso"

Para resolver los dos apartados del ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol:



a) La probabilidad de que un vuelo con destino a este aeropuerto se retrase viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P(R) = P(M) \cdot P(R/M) + P(T) \cdot P(R/T) + P(N) \cdot P(R/N) =$$

$$= \frac{120}{300} \cdot 0{,}02 + \frac{150}{300} \cdot 0{,}04 + \frac{30}{300} \cdot 0{,}06 = 0{,}008 + 0{,}02 + 0{,}006 = 0{,}034$$

b) La probabilidad de que fuera un vuelo nocturno, sabiendo que llegó con retraso, viene dada por (teorema de Bayes):

$$P(N/R) = \frac{P(N) \cdot P(R/N)}{P(R)} = \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{(30/300) \cdot 0{,}06}{0{,}034} = 0{,}1765$$

4. La duración de una batería de móvil sigue una distribución normal de media 3 años y desviación típica 0,5 años. Calcula la probabilidad de que una batería dure entre 2 y 4 años.

Solución:

Consideremos la variable aleatoria X que nos indica la duración de una batería de móvil. Dicha variable sigue una distribución:

$$X \sim N(3;\, 0{,}5)$$

Por tanto, la probabilidad de que una batería dure entre 2 y 4 años es:

$$P(2 < X < 4) = P\left(\frac{2-3}{0{,}5} < Z < \frac{4-3}{0{,}5}\right) = P(-2 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -2) =$$

$$= 2\,P(Z < 2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$$