# Junio 2014

## *OPCIÓN A*

1. Se consideran el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ x+y+3z=4 \\ 5x-y+az=10 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema en función de sus posibles soluciones para los distintos valores del parámetro $a$.

b) Resuelve el sistema para $a = 3$.

*Solución*:

a) Consideremos la matriz de los coeficientes $A$ y la matriz ampliada $\overline{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & a & 10 \end{array}\right)$$

Estudiemos los rangos de estas matrices. Se tiene que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} = a - 30 - 1 - 5 + 2a + 3 = 3a - 33$$

Dicho determinante se anula para $a = 11$. Por tanto:

- Si $a \neq 11 \Rightarrow$ rango $A$ = rango $\overline{A}$ = 3 = nº incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$ Solución única.
- Si $a = 11 \Rightarrow$ rango $A = 2$, ya que podemos encontrar un menor de orden dos no nulo en ella, por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$. Además, orlando dicho menor con los elementos de la última fila y la columna de los términos independientes, se tiene que: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 0$ y por tanto rango $\overline{A} = 2$.

  Así, como rango $A$ = rango $\overline{A}$ = 2 < 3 = nº incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I. $\Rightarrow$ Infinitas soluciones

b) Vamos a resolverlo para el caso $a = 3$, para el cual el sistema es compatible determinado, utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 5f_1]{f_2 \to f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & -2 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to f_3 - 3f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

Despejando $z$ de la última ecuación se obtiene que $z = 0$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación, se llega a que $y = 5/3$. Finalmente, sustituyendo los valores obtenidos para $y$ y $z$ en la primera ecuación, se llega a que $x = 7/3$.

Otra forma de obtener la solución para $a = 3$ es mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 10 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-56}{-24} = \frac{7}{3} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5 & 10 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-40}{-24} = \frac{5}{3} \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-24} = 0$$

2. Los beneficios en miles de euros obtenidos en un gimnasio inaugurado hace 5 años vienen dados por la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$, donde $x \in [0, 5]$ es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando el gimnasio desde su apertura.

   a) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio y cuánto vale ese beneficio máximo?
   b) El cuarto año de funcionamiento se produce una renovación general de las instalaciones del gimnasio. Explica razonadamente, en términos de aumento del beneficio, si dicha renovación tuvo éxito.

*Solución*:

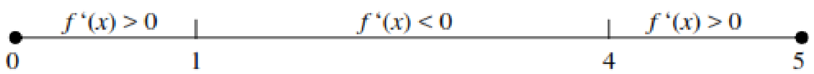
a) Para estudiar donde se alcanza el máximo beneficio, calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$$

Obtengamos a continuación los puntos singulares ($f'(x) = 0$):

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 - 30x + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{y} \quad x = 4$$

Se tiene entonces que los signos que toma la derivada primera en los distintos intervalos en que queda dividido el intervalo [0, 5] en el que está definida $f(x)$ por los puntos singulares son:




Como se puede observar fácilmente en la figura anterior, en $x = 1$, la función pasa de ser creciente ($f'(x) > 0$) a ser decreciente ($f'(x) < 0$) y por tanto en él hay un máximo. En $x = 4$, la función pasa de ser decreciente ($f'(x) < 0$) a ser creciente ($f'(x) > 0$) y por tanto en él hay un mínimo. Pero al estar considerando un intervalo cerrado, [0, 5], los máximos y mínimos absolutos podrían presentarse en los extremos del mismo. Veamos si es así comprobando que valores toma la función tanto en los extremos del intervalo, como en los puntos singulares:

$$f(0) = 26 \quad ; \quad f(1) = 37 \quad ; \quad f(4) = 10 \quad ; \quad f(5) = 21$$

Por lo tanto, el máximo absoluto se presenta para $x = 1$. Por tanto, al año de apertura los beneficios son máximos y en ese momento ascienden a 37000 euros.

*Nota*: El estudio de los máximos y mínimos de la función también se podría haber hecho a través de la derivada segunda:

$$f''(x) = 12x - 30 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''(1) = -18 \quad \Rightarrow \quad \text{En } x = 1 \text{ hay un máximo.} \\ f''(4) = 18 \quad \Rightarrow \text{En } x = 4 \text{ hay un mínimo.} \end{cases}$$

Es más conveniente la primera opción pues nos ayudará a responder a la segunda pregunta.

b) Para responder a esta pregunta, nos fijamos en el estudio de la monotonía hecho anteriormente. Puede verse que desde el primer año, donde el beneficio fue máximo, hasta el cuarto año los beneficios van decreciendo y es precisamente en ese cuarto año cuando los beneficios son mínimos. A partir de ese momento los beneficios vuelven a crecer y por tanto puede decirse que dicha renovación tuvo éxito.

3. Según cierto estudio, el tiempo, medido en horas, que un alumno de Bachillerato estudia en la biblioteca semanalmente sigue una distribución normal con media $\mu$ y desviación típica 2,5. Al tomar una muestra aleatoria de 100 estudiantes, se obtuvo una media muestral de 6,5 horas.

   a) Suponiendo que la media poblacional es $\mu = 6{,}3$ horas, ¿es compatible el resultado con ese valor poblacional, considerando un nivel de confianza del 95 %?
   b) Para el mismo nivel de confianza y suponiendo $\mu$ desconocida, determina el tamaño muestral adecuado para que el error máximo cometido en su estimación sea de 0,1 horas.

*Solución*:

a) Este apartado podemos resolverlo de dos maneras. Una es comprobando si el valor de la media poblacional queda dentro de un intervalo de confianza al 95 % construido a partir de los datos de la muestra. Otra manera sería plantear un test de hipótesis bilateral para la media poblacional. Veamos cada uno de ellos.

El intervalo de confianza para la media poblacional es de la forma:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

en el que, con los datos del enunciado tenemos que $\bar{x} = 6{,}5$ horas, $\sigma = 2{,}5$ horas, $n = 100$ y para una confianza del 95 % le corresponde un $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así pues:

$$I.\,C. = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (6{,}5 - 1{,}96 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{100}}, 6{,}5 + 1{,}96 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{100}}) = (6{,}01; 6{,}99)$$

Como el valor de la media poblacional, $\mu = 6{,}3$ horas, está dentro del intervalo de confianza calculado, podemos decir que ambos datos son compatibles con un nivel de confianza del 95 %.

Por otra parte, podríamos haber resuelto la cuestión mediante un test de hipótesis. Podríamos plantear la pregunta de este apartado del siguiente modo: ¿Se puede aceptar a un nivel de confianza del 95 % que la media poblacional es $\mu = 6{,}3$ horas?

Procedamos pues a plantear un test bilateral para la media poblacional:

1) Planteamos las hipótesis:

- Hipótesis nula, $H_0$: $\mu = 3{,}6$ horas.
- Hipótesis alternativa, $H_1$: $\mu \neq 3{,}6$ horas.

2) Elegimos como estadístico de contraste a la media muestral, que seguirá una distribución normal de media $\mu$ y desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (pues el tamaño de la muestra es mayor que 30):

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(3{,}6; \frac{2{,}5}{\sqrt{100}}\right) = N\,(3{,}6;\, 0{,}25)$$

3) Si tomamos un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$, entonces tenemos un valor crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y por tanto para este test bilateral la región de aceptación es:

$$R_a = (-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}) = (-1{,}96;\, 1{,}96)$$

4) Con los datos de la muestra que tenemos, la media muestral tiene un valor de $\overline{x} = 6{,}5$ horas, y al tipificar dicho valor se obtiene:

$$Z = \frac{6{,}5 - 6{,}3}{0{,}25} = \frac{0{,}2}{0{,}25} = 0{,}8$$

5) Como dicho valor, 0,8 pertenece a la región de aceptación $R_a$, se acepta la hipótesis nula a un nivel de significación del 0,05.

$$0{,}8 \in R_a = (-1{,}96;\, 1{,}96) \quad \Rightarrow \quad \text{Aceptamos } H_0 \text{ para } \alpha = 0{,}05$$

Como conclusión podemos decir por tanto que el valor obtenido en la muestra, $\overline{x} = 6{,}5$ horas, es compatible con el valor poblacional $\mu = 3{,}6$ horas.

b) El error máximo admisible viene dado por $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo $\sigma$ la desviación típica poblacional, $n$ el tamaño muestral y $z_{\alpha/2}$ el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 95 %. Por tanto, el tamaño de la muestra ha de ser:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$$

En nuestro caso, tenemos que $\sigma = 2{,}5$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Como además el error $E$ ha de ser menor que 0,1, se tendrá:

$$n \geq \left( \frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left( \frac{1{,}96 \cdot 2{,}5}{0{,}1} \right)^2 = 299$$

Por tanto, el tamaño muestral debe ser $n \geq 299$ estudiantes.

4. Sean $A$ y $B$ dos sucesos independientes, tal que $P(A) = 0{,}2$ y $P(A \cap B) = 0{,}16$. Halla la probabilidad de $\overline{A} \cap \overline{B}$.

*Solución*:

La probabilidad pedida viene dada por:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) \overset{(*)}{=} P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

donde hemos utilizado una de las leyes de De Morgan en el paso marcado con (*).

En la última expresión a la que hemos llegado, nos falta por conocer la probabilidad de $B$, $P(B)$. Pero si tenemos en cuenta que los sucesos $A$ y $B$ son independientes, tal como se indica en el enunciado, entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}16}{0{,}2} = 0{,}8$$

Entonces:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - [0{,}2 + 0{,}8 - 0{,}16] = 0{,}16$$

Otra forma de resolver el problema es teniendo en cuenta que si los sucesos $A$ y $B$ son independientes, también lo son $\overline{A}$ y $\overline{B}$. Por tanto:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = [1 - P(A)] \cdot [1 - P(B)] \overset{(*)}{=} [1 - 0{,}2] \cdot [1 - 0{,}8] = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$$

donde en el paso marcado con (*) hemos utilizado el valor para $P(B)$ calculado anteriormente.

## *OPCIÓN B*

1. En un taller textil se confeccionan 2 tipos de prendas: trajes y abrigos. Los trajes requieren 2 metros de lana y 1,25 metros de algodón y los abrigos 1,5 metros de lana y 2,5 metros de algodón. Se disponen semanalmente de 300 metros de lana y 350 metros de algodón, y esta semana deben fabricarse al menos 20 abrigos. Empleando técnicas de programación lineal, determina cuántos trajes y abrigos hay que hacer esta semana si se desea maximizar el beneficio obtenido, sabiendo que se ganan 250 euros por cada traje y 350 euros por cada abrigo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

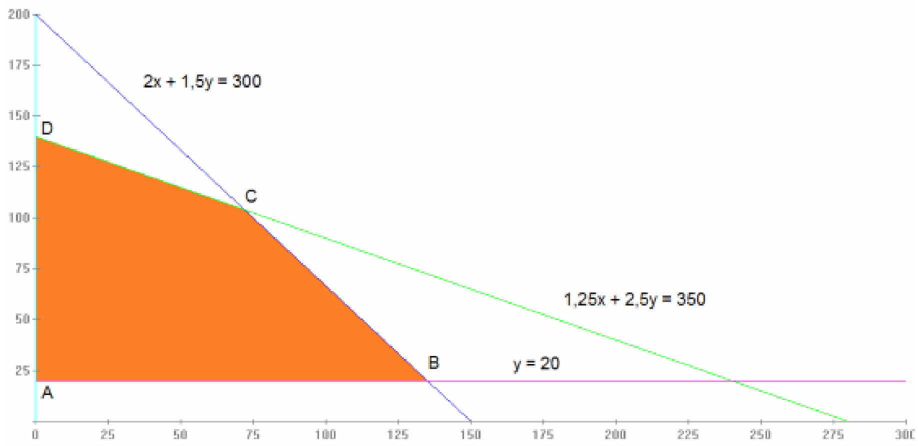
*Solución*:

Sea $x$ el número de trajes e $y$ el número de abrigos que se fabrican. A partir de los datos del problema podemos plantear las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{c} \text{Limite en la cantidad de lana disponible} \quad \Rightarrow \quad 2x + 1{,}5y \leq 300 \\ \text{Limite en la cantidad de algodón disponible} \quad \Rightarrow \quad 1{,}25x + 2{,}5y \leq 350 \\ \text{Cantidad de abrigos que se deben fabricar} \quad \Rightarrow \quad y \geq 20 \\ \text{Definición de la variables trajes} \quad \Rightarrow \quad x \geq 0 \end{array}$$

La función a maximizar, que nos da el beneficio obtenido es: $F(x, y) = 250x + 350y$

Representemos la región factible:




Los vértices de esta región son:

$$A = (0, 20) \qquad B = (135, 20) \qquad C = (72, 104) \qquad D = (0, 140)$$

Veamos en cual de ellos se presenta el máximo de la función de beneficios:

$F(0, 20) = 250 \cdot 0 + 350 \cdot 20 = 7000$
$F(135, 20) = 250 \cdot 135 + 350 \cdot 20 = 40750$
$F(72, 104) = 250 \cdot 72 + 350 \cdot 104 = 54400$
$F(0, 140) = 250 \cdot 0 + 350 \cdot 140 = 49000$

Por tanto, el máximo se presenta cuando se fabrican 72 trajes y 104 abrigos. El beneficio obtenido en este caso es de 54400 euros.

2. Representa gráficamente la función $f(x) = -2x^2 + ax - b$ sabiendo que alcanza su máximo en el punto (2, 2). Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto máximo.

*Solución*:

Para poder representar la función adecuadamente primero debemos calcular los coeficientes $a$ y $b$. Para calcularlos, tengamos en cuenta que la función $f(x) = -2x^2 + ax - b$ tiene un máximo en el punto (2, 2). De ello se deducen dos cosas:

- La gráfica de la función pasa por el punto (2, 2), esto es: $f(2) = 2$.
- En el punto de abscisa $x = 2$, $f'(x)$ se anula ($f'(2) = 0$) pues es un punto singular.

Así, obtenemos:

- Primero: $2 = -8 + 2a - b \quad \Rightarrow \quad 2a - b = 10$
- Segundo: $f'(x) = -4x + a \quad \Rightarrow \quad f'(2) = -8 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 8$

Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases} 2a - b = 10 \\ a = 8 \end{cases}$

Resolviéndolo se obtiene: $a = 8$ y $b = 6$. Por tanto la función es: $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

Para representarla, como se trata de una función polinómica de segundo grado, cuya representación gráfica es una parábola con las ramas dirigidas hacia abajo (por ser el coeficiente del término de mayor grado negativo), además del vértice, que es el punto (2, 2), calculemos los puntos de corte con los ejes.

- Cortes con el eje $X$ ($y = 0$):

$$-2x^2 + 8x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{y} \quad x = 3$$

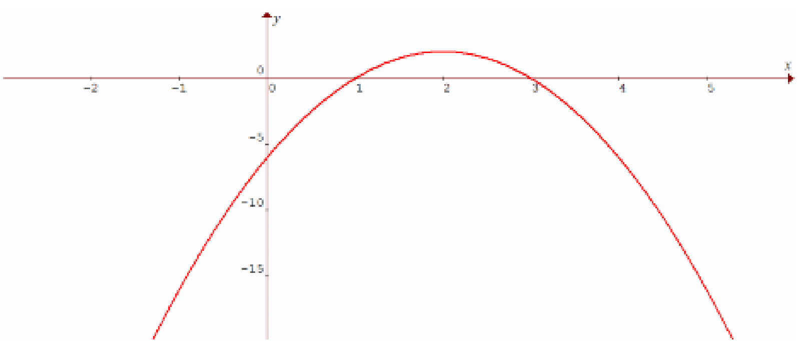
- Cortes con el eje $Y$ ($x = 0$):

$$f(0) = -2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 6 = -6$$

Por tanto los puntos de corte con los ejes son (1, 0), (3, 0) y (0, –6).

Si quisiéramos tener algún punto más para hacer la representación podríamos hacer una tabla de valores. Con ello se obtiene la siguiente representación:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| –1 | –16 |
| 4 | –6 |
| 5 | –16 |



Por otra parte, la ecuación de la recta tangente en el máximo, que es el punto (2, 2), vendrá dada por:

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$$

Como $f(2) = 2$ y $f'(2) = 0$, entonces, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 2 = 0 \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

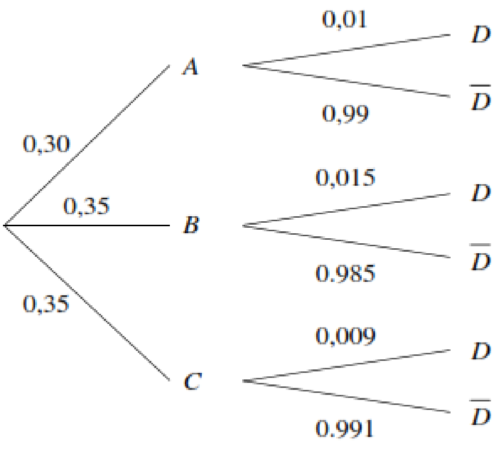
3. Una fábrica de piezas para aviones está organizada en tres secciones. La sección *A* fabrica el 30 % de las piezas, la sección *B* el 35 %, mientras que el resto se fabrican en la sección *C*. La probabilidad de encontrar una pieza defectuosa es del 0.01, 0.015 y 0.009 según se considere la sección *A*, *B* o *C*, respectivamente.
   a) Calcula la probabilidad de que una pieza elegida al azar salga defectuosa de dicha fábrica.
   b) Si elegida una pieza al azar es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que sea de la sección *B*?

*Solución*:

En primer lugar, consideremos los siguientes sucesos:

*A*: "ser una pieza fabricada en la sección *A*"
*B*: "ser una pieza fabricada en la sección *B*"
*C*: "ser una pieza fabricada en la sección *C*"
*D*: "ser una pieza defectuosa"
$\overline{D}$: "ser una pieza no defectuosa"

Para resolver los dos apartados del ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol:




a) La probabilidad de que una pieza elegida al azar salga defectuosa de dicha fábrica viene dada por (teorema de la probabilidad total):

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$
$$= 0{,}30 \cdot 0{,}01 + 0{,}35 \cdot 0{,}015 + 0{,}35 \cdot 0{,}009 = 0{,}0114$$

b) La probabilidad de que elegida una pieza al azar sea de la sección *B*, sabiendo que es defectuosa, viene dada por (teorema de Bayes):

$$P\,(B\,/\,D) = \frac{P(B)\cdot P(D/B)}{P(D)} = \frac{P(B\cap D)}{P(D)} = \frac{0,35\cdot 0,015}{0,0114} = 0,4605$$

4. Se elige al azar un número de 4 cifras distintas escrito con las cifras 7, 2, 3 y 8. Calcula la probabilidad de que dicho número sea mayor que 7500.

*Solución*:

Para resolver el problema podemos aplicar la regla de Laplace, que nos dice que la probabilidad de un suceso viene dada por el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.

En nuestro ejercicio, el número de casos favorables es el número de números mayores de 7500. Con las cifras dadas y teniendo en cuenta que han de ser distintas, los números mayores de 7500 serán los de la forma:

78_ _ o 8_ _ _

En los del primer tipo faltan por colocar las cifras 2 y 3 y por tanto su número viene dado por:

$$P_2 = 2! = 2$$

Estos números son: 7823 y 7832.

En los del segundo tipo hay que colocar de todas las formas posibles las cifras 2, 3 y 7 y por tanto su número viene dado por:

$$P_3 = 3! = 6$$

Estos números son: 8237, 8273, 8327, 8372, 8723 y 8732.

Entonces, el total de casos favorables es 8.

El número de casos posibles es la cantidad de números de cuatro cifras que se con las cuatro dadas sin repetir, y por tanto su número viene dado por:

$$P_4 = 4! = 24$$

Por tanto la probabilidad pedida es:

$$P\,(\textit{El número sea mayor que 7500}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

*Nota*: También se podrían haber calculado el número de casos totales y favorables a través de un diagrama de árbol, o escribiendo los números directamente.