Junio 2013

OPCIÓN A

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ donde x, y, z son desconocidos.
   a) Sabiendo que $A \cdot B + C = 3D$, plantea un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de x, y, z.
   b) Estudia el sistema planteado en función del número de soluciones y calcula una de ellas, si es posible.

Solución:

a) Calculemos $A \cdot B + C$ y $3D$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ -x+y \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot B + C = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ -x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix}$$

$$3D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como las matrices $A \cdot B + C$ y $3D$ son iguales, los términos que ocupan el mismo lugar han de ser iguales, y por tanto:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=0 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$$

b) Para estudiar qué tipo de sistema es el anterior, consideremos la matriz de los coeficientes, M, y la matriz ampliada del sistema ($\overline{M}$):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Estudiemos sus rangos a través de los determinantes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+2-2-1-2+2=0 \quad \Rightarrow \quad \text{El rango de } M \text{ no es 3.}$$

En la matriz M podemos encontrar un menor de orden 2 no nulo, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

Por tanto el rango de M es 2.

Veamos ahora cuál es el rango de $\overline{M}$. Para ello orlemos el menor de orden 2 nulo encontrado en la matriz M con las filas y columnas que faltan. Podemos formar entonces dos menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (Por ser } |M|\text{)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 6 - 3 - 2 = 0$$

Los dos menores de orden tres son nulos y por tanto el rango de la matriz $\overline{M}$ no puede ser 3. Se deduce entonces que el rango de la misma es 2.

Resumiendo, llegamos a la conclusión de que:

rango M = rango $\overline{M}$ = 2 < 3 = número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro (diferencia entre el número de incógnitas y los rangos). Para calcularlas podemos eliminar la última ecuación (que no forma parte del menor de orden 2 no nulo encontrado) y tomar como parámetro la incógnita z (cuyos coeficientes tampoco forman parte del menor de orden 2 no nulo encontrado). Así, tenemos el sistema ($z = \lambda$):

$$\begin{cases} x + y = 3 - \lambda \\ 2x - y = -2\lambda \end{cases}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se puede resolver fácilmente por cualquiera de los tres métodos clásicos, obteniéndose como solución:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Podemos calcular una de las infinitas soluciones dándole valores a λ. Por ejemplo, si $\lambda = 0$, la solución es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

2. Un estudio realizado por una empresa de producción de películas de acción prueba que el coste anual (en millones de euros) de contratación de actores secundarios que utiliza en sus películas sigue la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 60x + 800}{100x}$, donde $x > 0$ es el número de actores secundarios contratados. Calcula el número de actores secundarios contratados que hace mínimo el coste de contratación. ¿A qué cantidad asciende este coste mínimo?

Solución:
Para calcular el número de actores secundarios contratados que hace mínimo el coste de contratación, debemos estudiar la derivada primera de la función que nos indica cuál es dicho coste, esto es $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(4x+60)\cdot 100x - (2x^2 + 60x + 800)\cdot 100}{(100x)^2} = \frac{200x^2 - 80000}{10000x^2} = \frac{2x^2 - 800}{100x^2}$$

Resolvamos la ecuación $f'(x) = 0$ para ver donde están los puntos singulares:

$$\frac{2x^2 - 800}{100x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 800 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 20$$

La solución negativa no tiene sentido, pues ha de ser $x > 0$. Si representamos sobre una recta el otro punto singular y observamos cómo cambia la monotonía en él, obtenemos que:

$f'(x) < 0$ | $f'(x) > 0$

0 | 20

Por tanto, al cambiar la monotonía de decreciente a creciente, en $x = 20$ se encuentra un mínimo. El coste mínimo viene dado pues por $f(20)$, y asciende a:

$$\textit{Coste mínimo de contratación} = f(20) = \frac{2\cdot 20^2 + 60\cdot 20 + 800}{100\cdot 20} = \frac{2800}{2000} = 1{,}4 \text{ (millones de euros)}$$

3. Según el informe anual *La Sociedad de la Información 2012*, el 63 % de los usuarios de móvil en España tiene un "Smartphone". Entre los propietarios de este tipo de teléfono, el 77 % lo emplea para su conexión habitual a Internet. Sin embargo, entre los propietarios de otro tipo de teléfono móvil sólo el 8 % lo emplea para la conexión habitual a Internet.

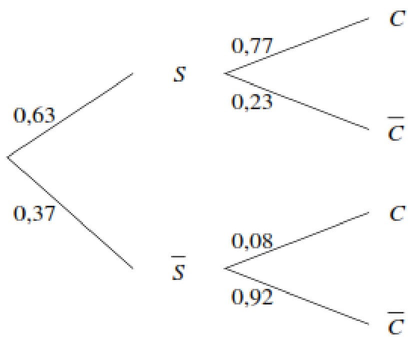
a) Calcula la probabilidad de conectarse habitualmente a Internet a través del teléfono móvil.

b) Si un usuario emplea habitualmente el teléfono móvil para conectarse a Internet, halla la probabilidad de que sea propietario de un "Smartphone".

Solución:
Para resolver este ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol, considerando los sucesos:

S: "ser usuario de un Smartphone".
C: "usar habitualmente el teléfono móvil para conectarse a Internet".

Hagamos un diagrama de árbol para ayudarnos a resolver el problema:



a) La probabilidad que nos piden viene dada por (Teorema de la probabilidad total):

$$P\,(C) = P\,(S) \cdot P\,(C\,/\,S) + P\,(\overline{S}) \cdot P\,(C\,/\,\overline{S}) = 0{,}63 \cdot 0{,}77 + 0{,}37 \cdot 0{,}08 = 0{,}5147$$

b) En este caso, la probabilidad que nos piden viene dada por (Teorema de Bayes):

$$P\,(S\,/\,C) = \frac{P(S)\cdot P(C\,/\,S)}{P(C)} = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}63 \cdot 0{,}77}{0{,}5147} = 0{,}9425$$

4. En una cuidad, la probabilidad de que llueva un día de junio el del 10 %, y de que haga sol un 75 %. Si no es posible que en un mismo día de junio llueva y haga sol simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de que en un día de junio no llueva ni haga sol?

Solución:
Consideremos los siguientes sucesos:

L: "Llueve en un día de junio".
S: "Hace sol en un día de junio".

Según los datos del problema tenemos que:

$$P\,(L) = 0{,}10 \qquad \text{y} \qquad P\,(S) = 0{,}75$$

Por otra parte, nos dicen que no es posible que en un mismo día de junio llueva y haga sol simultáneamente, por tanto, estos dos sucesos son incompatibles, es decir, su intersección es el suceso imposible, $L \cap S = \varnothing$, o expresado en términos de probabilidad:

$$P\,(L \cap S) = 0$$

El problema nos pide la probabilidad de que en un día de junio no llueva ni haga sol, es decir, la probabilidad del suceso $\overline{L} \cap \overline{S}$. Así:

$$P\,(\overline{L} \cap \overline{S}) = \xrightarrow{De\,Morgan} = P\,(\overline{L \cup S}) = 1 - P\,(L \cup S) = 1 - [P\,(L) + P\,(S)] =$$

$$= 1 - (0{,}10 + 0{,}75) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$$

OPCIÓN B

1. Un agricultor quiere cultivar una finca de 200 hectáreas únicamente con dos cultivos: trigo y remolacha. Al menos 90 hectáreas deben ser de trigo. Cada hectárea de trigo necesita una dedicación anual del agricultor de 20 horas y proporcionará un beneficio neto anual de 800 euros. Cada hectárea de remolacha requiere 30 horas de dedicación anual pero da un beneficio neto anual de 1000 euros. El agricultor podrá dedicar este año a esos cultivos un total de 4500 horas. Utiliza técnicas de programación lineal para encontrar cómo debe repartir el cultivo en la finca entre trigo y remolacha para que el beneficio neto anual sea máximo. Calcula, además, ese beneficio neto máximo.

Solución:
Sean x e y el número de hectáreas de trigo y remolacha que cultiva el agricultor, respectivamente.

Nos piden que calculemos cómo debe repartir el agricultor el cultivo en la finca entre trigo y remolacha para que el beneficio neto anual sea máximo. Por tanto la función objetivo, teniendo en cuenta que cada hectárea de trigo produce un beneficio neto anual de 800 euros y cada hectárea de remolacha produce un beneficio neto anual de 1000 euros vendrá dada por:

$$F(x, y) = 800x + 1000y$$

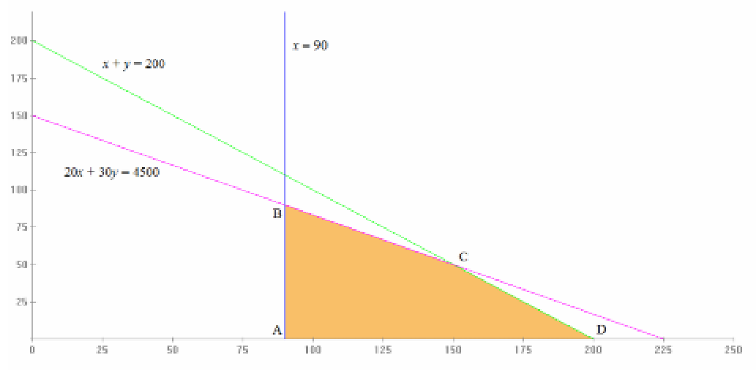
A partir del enunciado del problema podemos establecer las siguientes restricciones para x e y:

- El agricultor dispone únicamente de 200 hectáreas para cultivar: $x + y \leq 200$
- Al menos 90 hectáreas deben ser de trigo: $x \geq 90$
- El agricultor podrá dedicar a esos cultivos un total de 4500 horas: $20x + 30y \leq 4500$
- Aunque no lo indiquen explícitamente, debemos añadir: $y \geq 0$

Es decir, las restricciones que tenemos son:

$$\begin{array}{c} x + y \leq 200 \\ x \geq 90 \\ 20x + 30y \leq 4500 \\ y \geq 0 \end{array}$$

Dibujemos la región factible:



Los vértices de esta región son los puntos:

A (90, 0) B (90, 90) C (150, 50) D (200, 0)

El máximo de la función objetivo se presentará en uno de estos puntos. Veamos en cual:

$F(90, 0) = 800 \cdot 90 + 1000 \cdot 0 = 72000$
$F(90, 90) = 800 \cdot 90 + 1000 \cdot 90 = 162000$
$F(150, 50) = 800 \cdot 150 + 1000 \cdot 50 = 170000$
$F(200, 0) = 800 \cdot 200 + 1000 \cdot 0 = 160000$

Por tanto el beneficio máximo es de 172000 euros y se consigue cultivando 150 hectáreas de trigo y 50 hectáreas de remolacha.

2. El rendimiento físico de cierto deportista de élite durante un tiempo de 60 minutos, viene dado a través de la función:

$$f(t) = \begin{cases} -t(t-20) & \text{si} \quad 0 \le t < 15 \\ 75 & \text{si} \quad 15 \le t < 30 \\ 100 - \dfrac{5t}{6} & \text{si} \quad 30 \le t \le 60 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente esa función.
b) A la vista de la gráfica obtenida, identifica en qué momentos del tiempo el deportista alcanza su máximo rendimiento físico, mantiene su rendimiento físico y disminuye su rendimiento físico.

Solución:
a) Representemos esta función definida a trozos.

Si $0 \le t < 15$, la expresión de $f(t)$ es:

$$f(t) = -t\,(t-2) = -t^2 + 20t$$

La representación gráfica de la misma es una parábola con sus ramas dirigidas hacia abajo (por ser el coeficiente del término de mayor grado negativo). Su vértice se presenta en:

$$t_V = \frac{-20}{2\cdot(-1)} = 10 \quad \Rightarrow \quad f(t_V) = f(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 = 100$$

Nota: Dicho vértice también se puede calcular a través de la derivada primera.

Los puntos en los que $f(t)$ corta a los ejes son:

- Eje OY $(t = 0)$ $\Rightarrow$ $(0, f(0)) = (0, 0)$
- Eje OX $(f(t) = 0)$ $\Rightarrow$ $0 = -t^2 + 20t$ $\Rightarrow$ $t = 0$ y $t = 20$ $\Rightarrow$ $(0, 0)$ y $(20,0)$

Este último punto no está en el intervalo $0 \leq t < 15$ considerado. Calculemos entonces a que ordenada se acerca $f(t)$ si t se aproxima a 15:

$$\lim_{t \to 15}(-t^2 + 20t) = -15^2 + 20 \cdot 15 = 75$$

Si aún no tienes suficientes datos para representar este trozo de la función puedes hacer una tabla de valores.

Veamos ahora el trozo $15 \leq t < 30$. En este caso la expresión de $f(t)$ es:

$$f(t) = 75$$

Es por tanto una función constante y su represtación gráfica es una recta horizontal.

Veamos finalmente el trozo $30 \leq t \leq 60$. En este caso la expresión de $f(t)$ es:

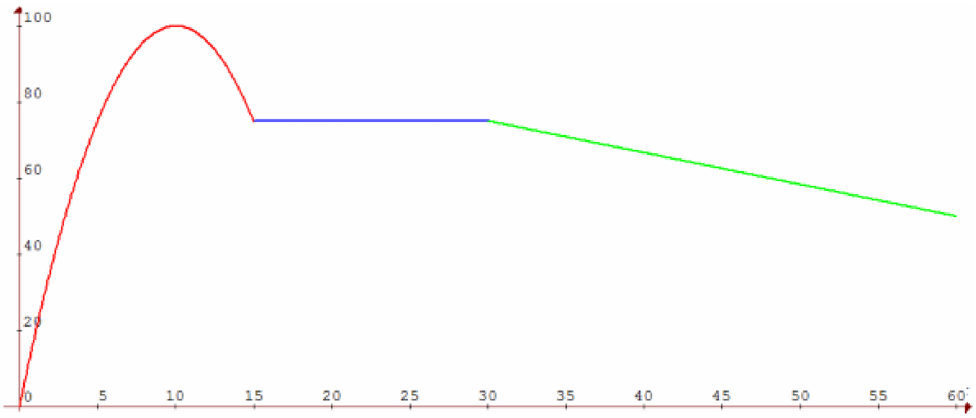
$$f(t) = 100 - \frac{5t}{6}$$

En este caso tenemos una función polinómica de primer grado y por tanto su represtación gráfica es una recta inclinada. Para representarla sólo son necesarios dos puntos que podemos calcular fácilmente:

$$t = 30 \quad \Rightarrow \quad f(30) = 100 - \frac{5 \cdot 30}{6} = 75$$

$$t = 60 \quad \Rightarrow \quad f(60) = 100 - \frac{5 \cdot 60}{6} = 50$$

Por tanto, resumiendo todo lo anteriormente expuesto, la representación gráfica de $f(t)$ es:



b) A la vista de la gráfica obtenida, se observa que el deportista alcanza su máximo rendimiento físico a los 10 minutos (vértice de la parábola), mantiene su rendimiento físico entre los 15 y los 30 minutos y disminuye su rendimiento físico entre los 10 y 15 minutos y también entre los 30 y los 60 minutos.

3. El porcentaje de vacas que enferman después de suministrarles una determinada vacuna es del 2 %. En una granja se vacunan a 600 vacas.
   a) Halla el número esperado de vacas vacunadas que no enfermarán.
   b) Halla la probabilidad de que, como máximo, enfermen 20 vacas vacunadas.

Solución:

Consideremos la variable aleatoria X que cuenta el número de vacas que enferman tras serles suministrada una determinada vacuna a 600 vacas. La probabilidad de que una vaca enferme, p, es del 2 % y por tanto $p = 0{,}02$.

La variable aleatoria X, como se comprueba sin dificultad, sigue una distribución binomial de parámetros $n = 600$ y $p = 0{,}02$:

$$X \sim B\,(600;\, 0{,}02)$$

a) El número esperado de vacas que enfermarán viene dado por la media o esperanza matemática, que para una variable binomial viene dada por el producto de n por p, esto es.

$$\mu = n \cdot p = 600 \cdot 0{,}02 = 12$$

Así, como el número esperado de vacas que se esperan que enfermen es 12, el número esperado de vacas que se esperan que no enfermen será 600 – 12 = 588 vacas.

b) Como sabemos la probabilidad de r éxitos en n intentos para una distribución binomial viene dada por:

$$p(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

Por tanto la probabilidad de que, como máximo, enfermen 20 vacas vacunadas, vendrá dada por:

$$P\,(X \leq 20) = P\,(X = 0) + P\,(X = 1) + \cdots + P\,(X = 20)$$

El cálculo de esta probabilidad se hace largo y laborioso por tener que calcular 21 sumandos distintos y con números grandes. Por ello se hace conveniente pensar en aproximar la distribución binomial por una distribución normal. Recordemos que esta aproximación se considera buena si se cumplen simultáneamente las condiciones $n \cdot p \geq 5$ y $n \cdot q \geq 5$. En nuestro caso:

$$n \cdot p = 600 \cdot 0{,}02 = 12 \geq 5 \quad \text{y} \quad n \cdot q = 600 \cdot 0{,}98 = 588 \geq 5$$

Así pues, podemos simplificar cálculos mediante esta aproximación:

$$X \sim B\,(n, p) \xrightarrow{np \geq 5 \text{ y } nq \geq 5} N\,(np,\, \sqrt{npq}\,)$$

En nuestro caso:

$$X \sim B\,(600;\, 0{,}02) \xrightarrow{np = 12 \geq 5 \text{ y } nq = 588 \geq 5} N\,(12,\, 3{,}43)$$

Aplicando la corrección por continuidad, pues pasamos de una variable discreta X a una variable continua Y, tenemos que:

$$P\ (X \leq 20) = P\ (Y \leq 20{,}5)$$

Como la variable Y no sigue una normal estándar, tipificamos y calculamos la probabilidad mediante la tabla:

$$P\ (X \leq 20) = P\ (Y \leq 20{,}5) = P\left(Z \leq \frac{20{,}5 - 12}{3{,}43}\right) = P\ (Z \leq 2{,}48) = 0{,}9934$$

4. El 60 % de los clientes de una frutería compran naranjas y el 30 % no compra ni naranjas ni manzanas. ¿Qué porcentaje de clientes compra manzanas, pero no naranjas?

Solución:
Consideremos los siguientes sucesos:

N: "Comprar naranjas".
M: "Comprar manzanas".

Según los datos del problema tenemos que:

$$P\ (N) = 0{,}60 \qquad \text{y} \qquad P\ (\overline{N} \cap \overline{M}\ ) = 0{,}30$$

El problema nos pide el porcentaje (probabilidad x 100) de clientes que compra manzanas, pero no naranjas. En base a los sucesos definidos anteriormente esta probabilidad se expresa como:

$$P\ (M \cap \overline{N}\ ) = P\ (M - N) = P\ (M \cup N) - P\ (N)$$

Por tanto, para calcular la probabilidad pedida nos hace falta conocer $P\ (M \cup N)$, que se calcula fácilmente si recordamos las leyes de De Morgan:

$$P\ (\overline{N} \cap \overline{M}\ ) = \xrightarrow{\text{De Morgan}} = P\ (\overline{N \cup M}\ ) = 1 - P\ (N \cup M)$$

Despejando:

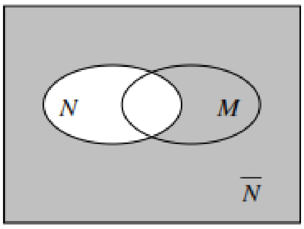
$$P\ (N \cup M) = 1 - P\ (\overline{N} \cap \overline{M}\ ) = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$$

Entonces:

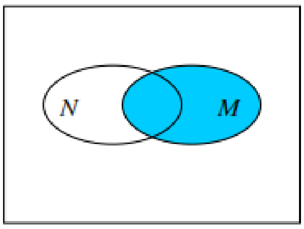
$$P\ (M \cap \overline{N}\ ) = P\ (M - N) = P\ (M \cup N) - P\ (N) = 0{,}70 - 0{,}60 = 0{,}10$$

Por tanto, el porcentaje de clientes que compra manzanas, pero no naranjas es del 10 %.

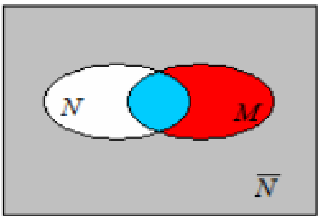
Ayuda: Observa las figuras



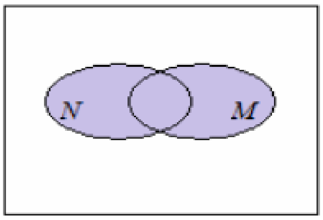
$\overline{N}$
(en gris)



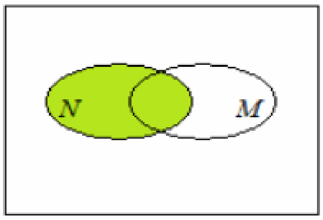
M
(en azul)



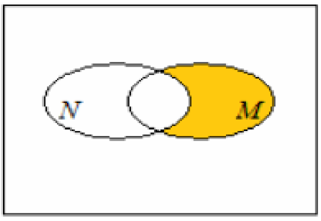
$(\overline{N} \cap M) = M - N$
(en rojo)



$M \cup N$
(en morado)



N
(en verde)



$M - N$
(en naranja)

$$M \cup N = N \cup (M - N) \quad \text{y} \quad N \cap (M - N) = \varnothing$$

$$P\,(M \cup N) = P\,(N) + P\,(M - N) \quad \Rightarrow \quad P\,(M - N) = P\,(M \cup N) - P\,(N)$$