Junio 2012

OPCIÓN A

1. Una fábrica produce tres tipos de herramientas: A, B y C. En la fábrica trabajan tres obreros, durante 8 horas diarias cada uno, y un revisor para comprobar las herramientas durante 1 hora diaria. Para fabricar una herramienta de tipo A se emplean dos horas de mano de obra y se necesitan 6 minutos de revisión, para la fabricación de una de tipo B se emplean 4 horas de mano de obra y 4 minutos de revisión y para una de tipo C se necesitan 1 hora de mano de obra y cuatro minutos de revisión. Por limitaciones en la producción, se deben producir exactamente 12 herramientas al día. Calcula el número de herramientas de cada tipo que se elaboran cada día en la fábrica.

Solución:

Sean:

x = nº de herramientas tipo A.
y = nº de herramientas tipo B.
z = nº de herramientas tipo C.

Teniendo en cuenta los datos del problema, podemos sacar a partir del enunciado el siguiente sistema de tres ecuaciones con las tres incógnitas antes mencionadas:

- Tiempo de mano de obra dedicadas a la fabricación de las herramientas, que en total son 24 horas diarias (3 obreros trabajando 8 horas diarias cada uno):

$$2x + 4y + z = 24$$

- Tiempo de revisión de las herramientas, que en total es 1 hora diaria (1 revisor trabajando 1 hora al día):

$$\frac{6}{60}x + \frac{4}{60}y + \frac{4}{60}z = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2y + 2z = 30$$

- Limitaciones en la producción, ya que se deben producir exactamente 12 herramientas al día:

$$x + y + z = 12$$

Es decir, tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 24 \\ 3x + 2y + 2z = 30 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

Se comprueba sin dificultad que es un sistema compatible determinado, pues la matriz de los coeficientes tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 3 + 8 - 2 - 4 - 12 = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{S.C.D.} \quad \Rightarrow \text{Solución única.}$$

Resolvamos este sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 24 \\ 3 & 2 & 2 & 30 \\ 1 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 3 & 2 & 2 & 30 \\ 2 & 4 & 1 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 2f_1]{f_2 \to f_2 - 3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 + 2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente que obtenemos es:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ -y - z = -6 \\ -3z = -12 \end{cases}$$

De la segunda última ya podemos despejar una de las incógnitas, z, y obtenemos que $z = 4$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación hallamos el valor de $y = 2$. Finalmente sustituyendo los valores de y y z en la primera ecuación obtenemos la incógnita que falta $x = 6$.

Por tanto se elaboran 6 herramientas del tipo ***A***, 2 del tipo ***B*** y 4 del tipo ***C***.

Nota: Dicho sistema también se podía haber resuelto utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 4 & 1 \\ 30 & 2 & 2 \\ 12 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-3} = 6 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 24 & 1 \\ 3 & 30 & 2 \\ 1 & 12 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 30 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{-3} = 4$$

2. Se considera la función: $f(x) = -x^3 + bx^2 + x + d$.
   a) Calcular razonadamente los valores de b y d para que la función $f(x)$ tenga un máximo relativo en el punto $(1, 4)$.
   b) Suponiendo $b = 1$ y $d = 3$, representa gráficamente la función en el intervalo $[-2, 2]$.

Solución:

a) A partir del dato de que la función $f(x) = -x^3 + bx^2 + x + d$ tiene un máximo en el punto $(1, 4)$, sabemos dos cosas:

- La gráfica de la función f pasa por el punto $(1, 4)$, esto es: $f(1) = 4$.
- En el punto de abscisa $x = 1$, $f'(x)$ se anula ($f'(1) = 0$) pues es un punto singular.

Así, obtenemos:

- Primero: $f(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad -1^3 + b \cdot 1^2 + 1 + d = 4 \quad \Rightarrow \quad b + d = 4$
- Segundo: $f'(x) = -3x^2 + 2bx + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 1$

Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} b + d = 4 \\ b = 1 \end{cases}$$

Resolviéndolo se obtiene: $b = 1$ y $d = 3$. Por tanto la función f es: $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 3$.

b) Suponiendo $b = 1$ y $d = 3$, la función f es: $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 3$. Representémosla en el intervalo $[-2, 2]$. En primer lugar tengamos en cuenta que f está definida y es continua en dicho intervalo ya que es una función polinómica.

Calculemos los puntos de puntos de corte con los ejes:

- Eje OY ($x = 0$). Si $x = 0 \;\Rightarrow\; f(0) = 3 \;\Rightarrow\;$ Punto $(0, 3)$
- Eje OX ($f(x) = 0$). Si $f(x) = 0 \quad -x^3 + x^2 + x + 3 = 0 \;\Rightarrow\;$ No tiene soluciones enteras.

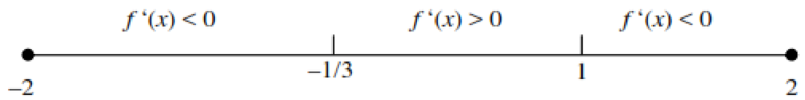
Estudiemos la monotonía y los extremos de la función. Para ello, calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$$

Obtengamos a continuación los puntos singulares ($f'(x) = 0$):

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{3} \;\text{ y }\; x = 1$$

Se tiene entonces que los signos que toma la derivada primera en los distintos subintervalos en que queda dividido el intervalo $[-2, 2]$ por los puntos singulares son::



Como se puede observar fácilmente en la figura anterior, en $x = -1/3$, la función pasa de ser decreciente ($f'(x) < 0$) a ser creciente ($f'(x) > 0$) y por tanto en él hay un mínimo. En $x = 1$, la función pasa de ser creciente ($f'(x) > 0$) a ser decreciente ($f'(x) < 0$) y por tanto en él hay un máximo.

- f crece en $(-1/3, 1)$ y f decrece en $(-2, -1/3) \cup (1, 2)$
- Mínimo en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{76}{27}\right)$ y Máximo en $(1, 4)$

Nota: Lo anterior lo podíamos ver de igual modo a través de la derivada segunda:

$$f''(x) = -6x + 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -6 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) + 2 = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{En } x = -\dfrac{1}{3} \text{ hay un mínimo.} \\ \\ f''(1) = -6 \cdot 1 + 2 = -4 < 0 \quad \Rightarrow \text{En } x = 1 \text{ hay un máximo.} \end{cases}$$

Para estudiar la curvatura y los puntos de inflexión, calculemos la derivada segunda:

$$f''(x) = -6x + 2$$

Veamos en que puntos se anula:

$$f''(x) = -6x + 2 \quad \Rightarrow \quad -6x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

Se tiene entonces que los signos que toma la derivada segunda en los distintos subintervalos en que queda dividido el intervalo [–2, 2] por dicho punto son::

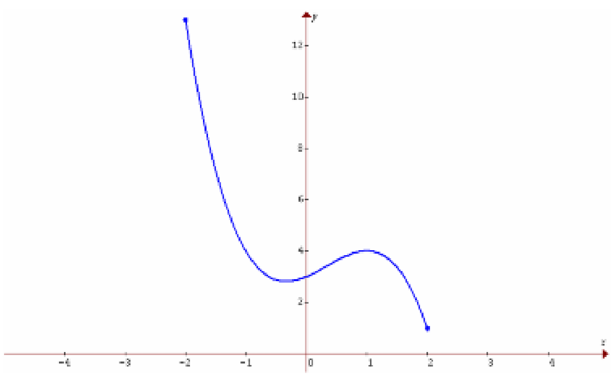
Como se puede observar fácilmente en la figura anterior, en $x = 1/3$, la función pasa de ser cóncava hacia arriba ($f''(x) > 0$) a ser cóncava hacia abajo ($f''(x) < 0$) y por tanto en él hay un punto de inflexión.

- f es cóncava hacia arriba en (–2, 1/3) y f es cóncava hacia abajo en (1/3, 2)
- Punto de inflexión en $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{92}{27}\right)$

Además, podemos calcular los valores de la función en los extremos del intervalo [–2, 2]:

$$f(-2) = 13 \qquad\qquad f(2) = 1$$

Su gráfica es la siguiente:

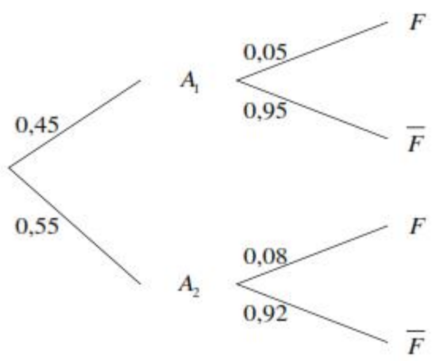


3. Un moderno edificio tiene dos ascensores para uso de los vecinos. El primero de los ascensores es usado el 45 % de las ocasiones, mientras que el segundo es usado el resto de las ocasiones. El uso continuado de los ascensores provoca un 5 % de fallos en el primero de los ascensores y un 8 % en el segundo. Un día suena la alarma de uno de los ascensores porque ha fallado. Calcula la probabilidad de que haya sido el primero de los ascensores.

Solución:
Para resolver este ejercicio, hagamos el siguiente diagrama de árbol, considerando los sucesos:

A_1: "ser usado el primer ascensor".
A_2: "ser usado el segundo ascensor".
F: "se produce un fallo en el ascensor".

Hagamos un diagrama de árbol para ayudarnos a resolver el problema:



La probabilidad que nos piden es la probabilidad de que haya fallado l primero de los ascensores, sabiendo que uno de ellos ha fallado, es decir, $P(A_1 / F)$. Esta viene dada por:

$$P(A_1 / F) = \frac{P(A_1 \cap F)}{P(F)} = \frac{0,45 \cdot 0,05}{0,45 \cdot 0,05 + 0,55 \cdot 0,08} = \frac{0,0225}{0,0665} = 0,3383$$

Nota: Este problema también se puede resolver haciendo una tabla de contingencia de la siguiente manera:

	A_1	A_2	
F	5 % de 45 = 2,25	8 % de 55 = 4,4	2,25 + 4,4 = 6,65
$\overline{F}$	45 – 2,25 = 42,75	55 – 4,4 = 50,6	42,75 + 50,6 = 93,35
	45 % de 100 = 45	55 % de 100 = 55	100

Por tanto:

$$P(A_1 / F) = \frac{P(A_1 \cap F)}{P(F)} = = \frac{2,25}{6,65} = 0,3383$$

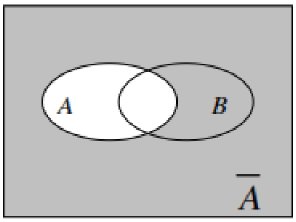
4. Calcula $P\,(\overline{A}\ /\ B)$ sabiendo que $P\,(A) = \dfrac{1}{3}$, $P\,(B) = \dfrac{1}{4}$ y $P\,(A \cap B) = \dfrac{1}{5}$.

Solución:

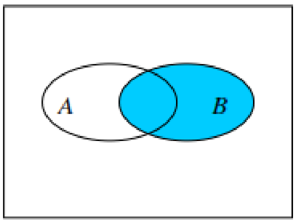
Se tiene que:

$$P\,(\overline{A}\ /\ B) = \frac{P\,(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5}}{\dfrac{1}{4}} = \frac{\dfrac{1}{20}}{\dfrac{1}{4}} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

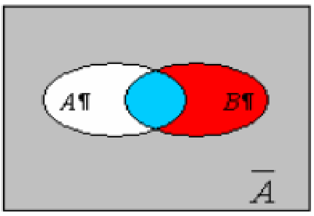
Ayuda: Observa las figuras:



$\overline{A}$



B



$(\overline{A} \cap B) = B - A$

OPCIÓN B

1. Un ahorrador dispone de 4000 € para invertir en dos tipos de fondos de inversión a cierto plazo. En el fondo *A* cada participación tiene un coste de 40 € y produce un beneficio de 15 €, mientras que en el fondo *B* cada participación da un beneficio de 5 € y su coste es de 50 €. Sabiendo que se puede adquirir un máximo de 60 participaciones del fondo *A* y al menos 40 del fondo *B*, utiliza técnicas de programación lineal para determinar cuántas participaciones de cada fondo se deben comprar para maximizar el beneficio y calcula ese beneficio.

Solución:

Sean x e y el número de participaciones de tipo *A* y de tipo *B*, respectivamente. A partir del enunciado del problema podemos establecer las siguientes condiciones:

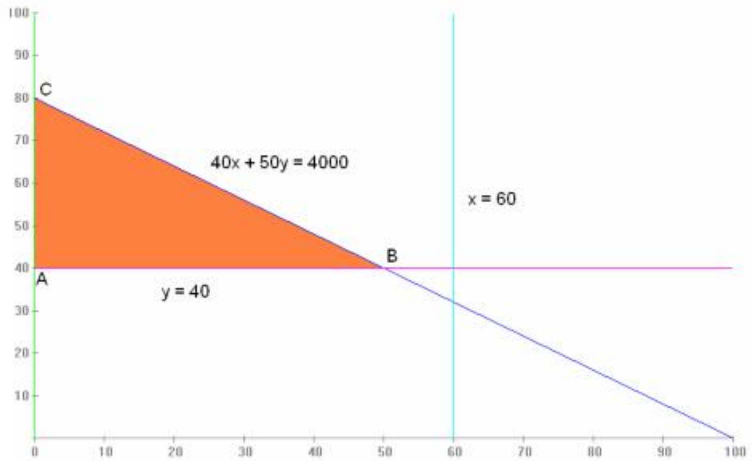
- Dinero invertido en comprar las participaciones (tope máximo 4000 €) : $40x + 50y \leq 4000$
- Se puede adquirir un máximo de 60 participaciones del fondo *A*: $0 \leq x \leq 60$
- Se debe adquirir al menos 40 participaciones del fondo *B*: $y \geq 40$

Es decir, las restricciones que tenemos son:

$$\begin{gathered} 40x + 50y \leq 4000 \\ 0 \leq x \leq 60 \\ y \geq 40 \end{gathered}$$

La función a maximizar, que nos da el beneficio obtenido por el inversor es: $F(x, y) = 15x + 5y$

Dibujemos la región factible:



Los vértices de esta región son los puntos:

A (0, 40) B (50, 40) C (0, 80)

El máximo de la función objetivo se presentará en uno de estos puntos. Veamos en cual:

$$F\,(0, 40) = 15 \cdot 0 + 5 \cdot 40 = 200$$
$$F\,(50, 40) = 15 \cdot 50 + 5 \cdot 40 = 950$$
$$F\,(0, 80) = 15 \cdot 0 + 5 \cdot 80 = 400$$

Por tanto el beneficio máximo es de 950 euros y se consigue comprando 50 participaciones de tipo *A* y 40 participaciones de tipo *B*.

2. Un agricultor dispone de 3000 € para cercar un terreno rectangular, usando el río adyacente como lado con el fin de que el recinto sólo necesite 3 cercas. El coste de la cerca paralela al río es de 5 € por metro instalado, y el de la cerca para cada uno de los lados restantes es de 3 € por metro instalado. Calcula las dimensiones del terreno de área máxima que puede cercar con el presupuesto que tiene.

Solución:

Hagamos un dibujo que aclare la situación:

Necesitamos que el área del terreno sea máxima con el presupuesto de que disponemos, 3000 €, para cercarla. El área de dicho terreno viene dada por:

$$\acute{A}rea\,(x, y) = x \cdot y$$

La relación entre las variables viene dada por la disponibilidad económica, 300 €, de que disponemos para la cerca. El coste de la cerca es diferente dependiendo que la pongamos sobre el lado paralelo al río o sobre los otros lados. Teniendo en cuenta esto, la relación entre variables viene dada por:

$$3000 = 6x + 5y$$

Por tanto:

$$y = \frac{3000 - 6x}{5} = 600 - \frac{6}{5}x$$

Sustituyendo en el área:

$$\acute{A}rea\,(x) = A\,(x) = x \cdot \left(600 - \frac{6}{5}x\right) = 600x - \frac{6}{5}x^2$$

Calculemos la derivada primera:

$$A\,'(x) = 600 - \frac{12}{5}x$$

Entonces:

$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 600 - \frac{12}{5}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 250 \text{ m}$$

Veamos que es un mínimo con la derivada segunda:

$$A\,''(x) = -\frac{12}{5} \quad \Rightarrow \quad A\,''(250) = -\frac{12}{5} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo}$$

Las dimensiones del terreno de área máxima $x = 250$ m e $y = 300$ m.

3. En un determinado municipio, los ingresos mensuales de sus habitantes siguen una distribución normal de media μ y desviación típica 200 €. Se seleccionó al azar una muestra de 100 personas cuya media de ingresos mensuales resultó de 1060 €.

a) Para un nivel de confianza del 95 %, calcula un intervalo de confianza para el ingreso medio mensual en ese municipio.

b) Si se toma un nivel de significación de 0,01, calcula el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el ingreso medio mensual con un error menor de 30 €.

Solución:

a) El intervalo de confianza pedido para el ingreso medio mensual en ese municipio. será de la forma $\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, en el que $\overline{x} = 1060$ €, $\sigma = 200$ €, $n = 100$ y para una confianza del 95 % le corresponde un $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así pues:

$$I = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1060 - 1{,}96\cdot\frac{200}{\sqrt{100}},\ 1060 + 1{,}96\cdot\frac{200}{\sqrt{100}}) = (1020{,}8;\ 1099{,}2)$$

b) El tamaño muestral mínimo necesario para estimar el ingreso medio mensual con un error menor de 30 €, para un nivel de significación de 0,01 ($z_{\alpha/2} = 2{,}58$) viene dado por:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2{,}58\cdot 200}{30}\right)^2 = (17{,}2)^2 = 295{,}84$$

Por tanto, el tamaño muestral mínimo necesario es $n = 296$.

4. La probabilidad de romper una galleta al ser envasada es el 1 %. Si en un envase hay 10 galletas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una galleta esté rota debido a la operación de envasado?

Solución:
Consideremos la variable aleatoria X que nos indica el número de galletas rotas al ser envasadas. Dicha variable aleatoria, para el caso que nos ocupa sigue una distribución binomial $B\,(10; 0{,}01)$ ya que:

$$n = 10, \quad p = P\,(\text{Galleta rota}) = 0{,}01$$

Sabemos que la probabilidad de r éxitos en n intentos para una distribución binomial viene dada por:

$$p(X = r) = \binom{n}{r} p^r \left(1 - p\right)^{n-r}$$

Por tanto la probabilidad de encontrar al menos una galleta rota en la operación de envasado es:

$$P\,(X \geq 1) = 1 - P\,(X < 1) = 1 - P\,(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}\,(0{,}01)^0\,(0{,}99)^{10} =$$
$$= 1 - 0{,}9044 = 0{,}0956$$