Junio 2011

OPCIÓN A

1. Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$2X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 28 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

Podemos despejar la matriz X de la segunda ecuación ya que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es regular por ser su determinante no nulo. Calculemos su inversa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Adj \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

También podríamos haber obtenido la matriz X, considerando que ha de ser una matriz cuadrada de orden 2 de elementos:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Así, tendríamos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de estas dos matrices se obtiene:

$$\begin{gathered} a + c = -1 \\ b + d = 12 \\ c = 2 \\ d = 7 \end{gathered}$$

Sustituyendo los valores de c y d obtenidos en las dos últimas ecuaciones en las dos primeras se tiene que $a = -3$ y $b = 5$. Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

A continuación, para calcular la matriz Y, sustituimos esta matriz X obtenida en la primera ecuación y despejando, obtenemos:

$$2X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 28 \\ 10 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 28 \\ 10 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 28 \\ 10 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 28 \\ 10 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow 3Y = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. El número de visitantes diarios a una feria de turismo viene dado por la función $V(t) = -30(t^2 - 14t - 11)$, donde $t \in (0, 10)$ es el tiempo (en horas) transcurrido desde la apertura de la feria.

a) ¿Cuándo aumenta la afluencia de público y cuándo disminuye? ¿En qué momento se alcanza el número máximo de visitantes?
b) Determina ese número máximo de visitantes.

Solución:

a) Para conocer cuando aumenta la afluencia de público y cuándo disminuye, debemos estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $V(t)$. Estudiemos la derivada primera:

$$V'(t) = -60t + 420$$

Igualándola a cero para calcular los puntos singulares obtenemos que:

$$-60t + 420 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 7$$

Teniendo en cuenta que $t \in (0, 10)$, si dibujamos sobre una recta este intervalo y el punto singular obtenido y estudiamos el signo de $V'(t)$, tenemos:

Se tiene entonces que la afluencia de visitantes aumenta en las siete primeras horas, es decir, en el intervalo (0, 7), y disminuye en las tres últimas, es decir, en el intervalo (7, 10). El número máximo de visitantes se alcanza por tanto para $t = 7$.

b) El número máximo de visitantes viene dado por $V(7)$:

$$V(7) = -30\,(7^2 - 14 \cdot 7 - 11) = -30\,(49 - 98 - 11) = -30 \cdot (-60) = 1800 \text{ visitantes}$$

3. El 38 % de los habitantes de una ciudad declaran que su deporte preferido es el fútbol, el 21 % prefiere el baloncesto y el resto se inclina por otro deporte. Si se eligen al azar tres personas, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Las tres personas son aficionadas al fútbol.
b) Dos personas prefieren el fútbol y la otra el baloncesto.
c) Al menos una de las tres personas prefiere otro deporte diferente al fútbol y al baloncesto.

Solución:

a) Consideremos los siguientes sucesos:

F = "ser aficionado al fútbol"
B ="ser aficionado al baloncesto"
OD = "ser aficionado a otro deporte"

Se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(F) = 0{,}38 \qquad P(B) = 0{,}21 \qquad P(OD) = 1 - (0{,}38 + 0{,}21) = 0{,}41$$

Con esto, si tenemos en cuenta que los sucesos son independientes, se tiene que:

a)
P (las tres personas sean aficionadas al fútbol) = $P(F \cap F \cap F) = 0{,}38 \cdot 0{,}38 \cdot 0{,}38 = 0{,}054872$

b)

$$P\text{ (Dos personas prefieren el fútbol y la otra el baloncesto)} =$$
$$= P(F \cap F \cap B) + P(F \cap B \cap F) + P(B \cap F \cap F) =$$
$$= 3 \cdot 0{,}38 \cdot 0{,}38 \cdot 0{,}21 = 0{,}090972$$

c)

$$P\text{ (Al menos una de las tres personas prefiere otro deporte)} =$$
$$= 1 - P\text{ (Ninguna prefiere oto deporte)} = 1 - P(\overline{OD} \cap \overline{OD} \cap \overline{OD}) =$$
$$= 1 - 0{,}59 \cdot 0{,}59 \cdot 0{,}59 = 0{,}794621$$

Nota: $P(\overline{OD})\ 1 - P(OD) = 1 - 0{,}41 = 0{,}59$

4. Sean los sucesos A y B, tales que $P(A) = 1/5$ y $P(B) = 1/2$. Halla la probabilidad del suceso $A \cup B$, si A y B son independientes.

Solución:

Si a y b son independientes, entonces se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

Por otra parte, se tiene que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

OPCIÓN B

1. Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería, por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado, en total, 600 euros y han vendido el doble de participaciones de 1 euro que de 5 euros. Si han vendido un total de 260 participaciones, calcula el número de participaciones que han vendido de cada importe.

Solución:

Planteemos a partir de los datos un sistema de ecuaciones. Sean x, y y z el número de participaciones de lotería de 1, 2 y 5 euros respectivamente. Tendremos entonces:

- Han recaudado en total 600 euros $\Rightarrow$ $x + 2y + 5z = 600$
- Han vendido el doble de participaciones de 1 euro que de 5 euros $\Rightarrow$ $x = 2z$
- Han vendido un total de 260 participaciones $\Rightarrow$ $x + y + z = 260$

Entonces el sistema de ecuaciones que se obtiene es el siguiente:

$$\begin{cases} x+2y+5z=600 \\ x-2z=0 \\ x+y+z=260 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema utilizando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 600 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 260 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3\to f_3-f_1]{f_2\to f_2-f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 600 \\ 0 & -2 & -7 & -600 \\ 0 & -1 & -4 & -340 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3\to 2f_3-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 600 \\ 0 & -2 & -7 & -600 \\ 0 & 0 & -1 & -80 \end{array}\right)$$

El sistema escalonado equivalente es:

$$\begin{cases} x+2y+5z=600 \\ -2y-7z=-600 \\ -z=-80 \end{cases}$$

Despejando z de la última ecuación obtenemos, $z = 80$. Sustituyendo su valor el la segunda ecuación y despejando y obtenemos, $y = 20$. Sustituyendo estos dos valores en la primera ecuación y despejando x obtenemos, $x = 160$. Por tanto, se han vendido 160 papeletas de 1 euro, 20 papeletas de 2 euros y 80 papeletas de 5 euros.

Otra forma de resolver el sistema es mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 600 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 260 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{160}{1}=160 \;;\; y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 600 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 260 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{20}{1}=20 \;;\; z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 600 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 260 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{80}{1}=80$$

Otra forma de resolver el sistema sería despejando x de la segunda ecuación y sustituyendo su valor el las otras dos obtendremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2y+7z=600 \\ y+3z=260 \end{cases}$$

Resolviéndolo obtenemos que $y = 20$ y $z = 80$. Por tanto, $x = 160$.

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$:
   a) Calcula sus asíntotas.
   b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y sus mínimos.
   c) Con los datos anteriores, representa gráficamente la función.

Solución:

En primer lugar tengamos en cuenta que $Dom\, f = \mathbb{R} - \{1\}$.

a) Calculemos las asíntotas:

- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{2(x-1)} = \frac{1}{0} = \infty$$

Por tanto, la recta $x = 1$ es un asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{2(x-1)} = \infty$$ (por ser el grado del numerador mayor que el grado del denominador)

Por tanto, no existen asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas: Si existen son de la forma $y = mx + n$, donde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$$

Calculémoslos:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2-2x} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+x}{2x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x-2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la asíntota oblicua es la recta $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

b) Para estudiar su crecimiento y decrecimiento, y hallar los máximos y mínimos de la curva calculemos su derivada primera:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 2(x-1) - x^2 \cdot 2}{[2(x-1)]^2} = \frac{2x^2 - 4x}{4(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{2(x-1)^2}$$

Obtenemos los puntos singulares, resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - 2x}{2(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ y } \ x = 2$$

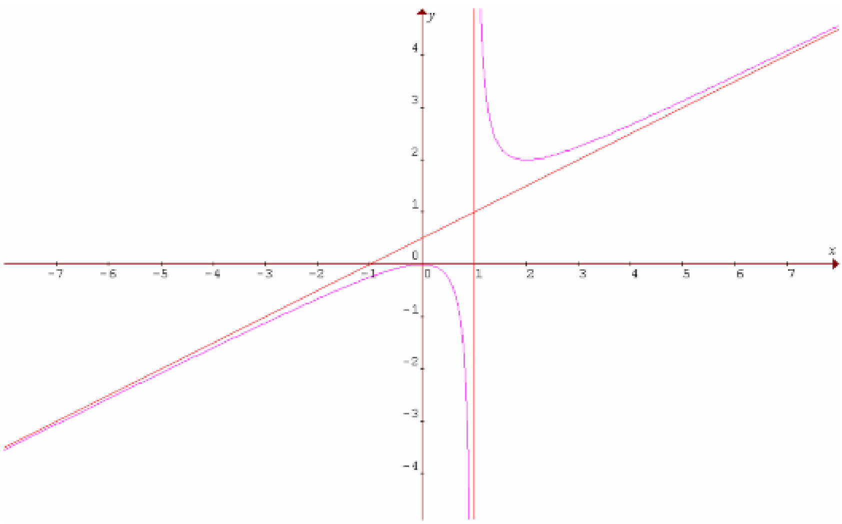
Representando sobre una recta estos valores y los que no pertenecen al dominio, y estudiando en cada uno de los intervalos en que queda dividida el signo de la derivada primera obtenemos:

$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	1	$f'(x) < 0$	2	$f'(x) > 0$

Por tanto, $f(x)$ crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 1) \cup (1, 2)$. De aquí deducimos que la función tiene un máximo en $x = 0$ (cambia de ser creciente a decreciente) y un mínimo en $x = 2$ (cambia de ser decreciente a creciente)

Máximo en (0, 0)
Mínimo en (2, 2)

c) Con los datos anteriores podemos hacer un esbozo de la función:



3. Una empresa fabrica tornillos para llantas cuyo diámetro sigue una distribución normal de media μ milímetros y desviación típica 2 milímetros. Se selecciona un lote de 100 tornillos y resulta una media muestral de 19 milímetros.

a) Determina un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) Para un determinado modelote automóvil, se exige que el diámetro medio de los tornillos sea de 20 milímetros. Plantea un test de hipótesis que permita decidir si los tornillos fabricados se ajustan a este tamaño, con una confianza del 95 %.

Solución:

a) El intervalo de confianza pedido será de la forma $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, en el que $\bar{x}$ = 19 mm, σ = 2 mm, n = 100 y para una confianza del 98 % le corresponde un $z_{\alpha/2}$ = 2,33. Así pues:

$$IC=\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(19-2,33\cdot\frac{2}{\sqrt{100}},19+2,33\cdot\frac{2}{\sqrt{100}}\right)=$$
$$=(18{,}534;\ 19{,}466)$$

b) Hay que hacer un contraste de hipótesis para la media.

Haremos un contrate bilateral:

Hipótesis nula, H_0: μ = 20 mm
Hipótesis alternativa, H_1: μ ≠ 20 mm

El nivel de confianza es del 95 % y por tanto el nivel de significación, α, es del 5 %. Para este nivel de significación, el valor crítico $z_{\alpha/2}$ tiene un valor $z_{\alpha/2}$ = 1,96.

Si tomamos como estadístico de contraste la media muestral, $\bar{x}$ = 19 mm, esta seguirá una distribución normal $N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=N\left(20,\frac{2}{\sqrt{100}}\right)N$ (20; 0,2). Aceptaremos la hipótesis nula si, al tipificar dicho valor de $\bar{x}$, este pertenece al intervalo $(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$. En caso contrario rechazamos la hipótesis nula, esto es, aceptamos la hipótesis alternativa.

$$z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}=\frac{19-20}{0,2}=-5\notin(-1{,}96;\ 1{,}96)$$

Por tanto, se rechaza la hipótesis nula de que el diámetro medio de los tornillos sea de 20 milímetros y se acepta la hipótesis alternativa.

4. El 10 % de los huevos de un supermercado están rotos. Halla la probabilidad de que un cliente que compra media docena de huevos encuentre como mucho un huevo roto.

Solución:

Consideremos la variable aleatoria X que nos indica el número de huevos rotos. Dicha variable aleatoria, para el caso que nos ocupa sigue una distribución binomial $B\,(6;\,0{,}1)$ ya que:

$$n = 6, \quad p = P\,(\text{Huevo roto}) = 0{,}1$$

Sabemos que la probabilidad de r exitos en n intentos para una distribución binomial viene dada por:

$$p(X = r) = \binom{n}{r} p^r \left(1 - p\right)^{n-r}$$

Por tanto la probabilidad de encontrar como mucho un huevo roto será:

$$P\,(X \le 1) = P\,(X = 0) + P\,(X = 1) = \binom{6}{0}\,(0{,}1)^0\,(0{,}9)^6 + \binom{6}{1}\,(0{,}1)^1\,(0{,}9)^5 =$$
$$= 0{,}5314 + 0{,}3543 = 0{,}8857$$