Julio 19

Opción A

1A- Un comerciante dispone de 350000 € para comprar dos modelos de lámparas. El modelo A tiene un coste de 150 € y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 15 €. El modelo B tiene un coste de 100 € y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 11 €. Por experiencia sabe que sólo puede almacenar 3000 lámparas como máximo y que puede vender como máximo 2000 lámparas del modelo A. Determina, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas lámparas de cada modelo debe comprar para maximizar el beneficio conseguido en las ventas. Calcula ese beneficio máximo.

Llamemos x = número de lámparas del modelo A, y = número de lámparas del modelo B.
Las restricciones a la situación planteada son:

- Deben ser valores positivos → $x \geq 0$; $y \geq 0$
- Un comerciante dispone de 350000 €, el modelo A tiene un coste de 150 € y el modelo B cuesta 100 € → $350000 = 150x + 100y$
- Sólo puede almacenar 3000 lámparas como máximo → $x + y \leq 3000$
- Puede vender como máximo 2000 lámparas del modelo A → $x \leq 2000$

Resumiendo, las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 2000 \\ 150x + 100y \leq 350000 \Rightarrow 3x + 2y \leq 7000 \\ x + y \leq 3000 \end{array}\right\}$$

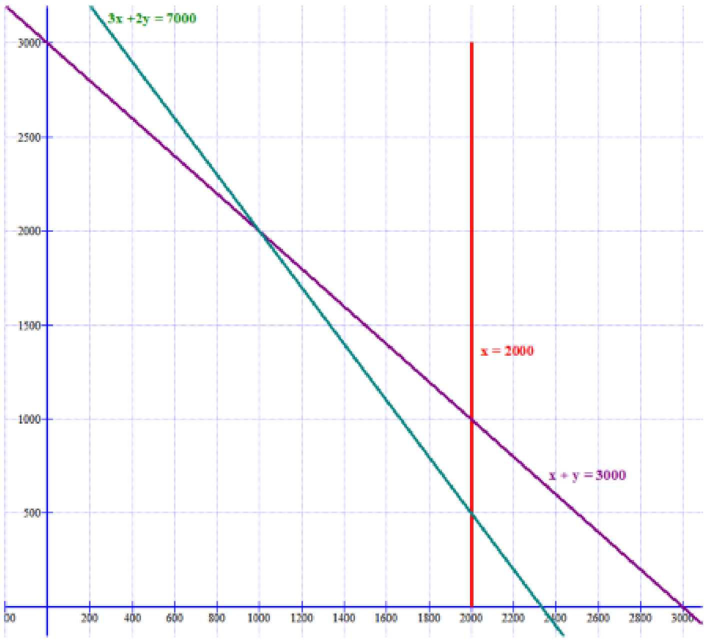
La función que deseamos maximizar es la función beneficio:

$$Beneficio = B(x,y) = 15x + 11y$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada restricción:

x	$y = \dfrac{7000-3x}{2}$
1000	2000
2000	500
0	3500

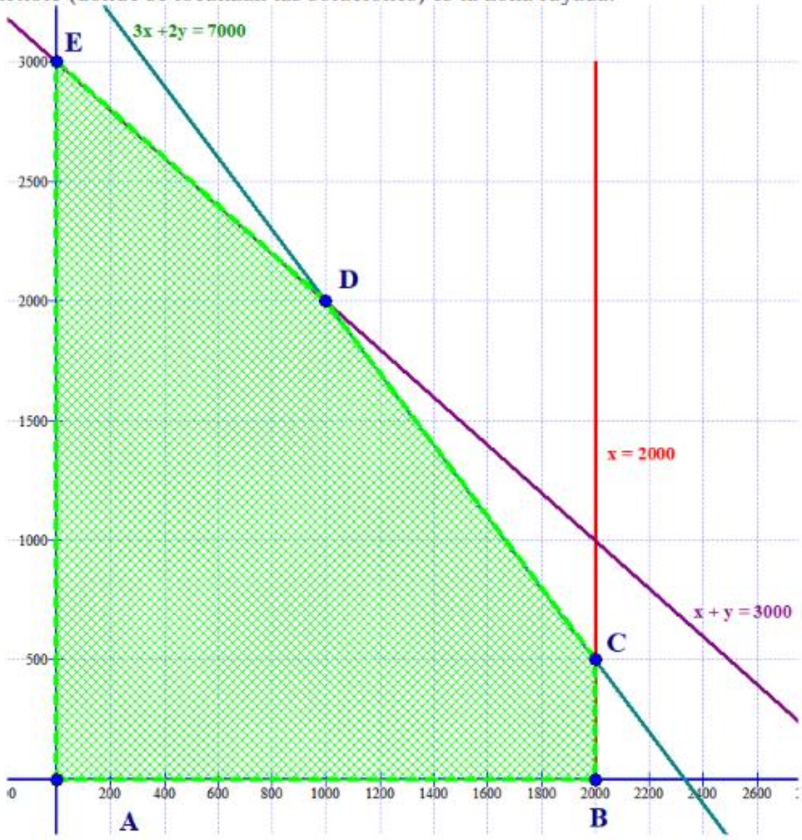
x	$y = 3000 - x$
0	3000
3000	0
1000	2000



Si probamos el punto (200, 200) vemos que cumple todas las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 200 \geq 0 \\ 200 \geq 0 \\ 200 \leq 2000 \\ 600+400 \leq 7000 \\ 200+200 \leq 3000 \end{array}\right\}$$

La región factible (donde se localizan las soluciones) es la zona rayada:



Y las coordenadas de los vértices de la región son: A(0,0), B(2000,0), C(2000, 500), D(1000, 2000) y D(0, 3000).

Valoramos la función beneficio en cada uno de ellos y decidimos cual da máximo beneficio.

$$A(0,0) \Rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(2000,0) \Rightarrow B(2000,0) = 30000$$

$$C(2000,\ 500) \Rightarrow B(2000,500) = 30000 + 5500 = 35500$$

$$D(1000,\ 2000) \Rightarrow B(1000,2000) = 15000 + 22000 = 37000$$

$$D(0,\ 3000) \Rightarrow B(0,3000) = 33000$$

El máximo beneficio se obtiene para el punto D(1000, 2000). Debe comprar 1000 lámparas del modelo A y 2000 del modelo B. Obteniendo un beneficio de 37000 €.

2A- Representa gráficamente la función $y=-ax^3-bx+c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un mínimo relativo en el punto $(x,y)=(1,-1)$.
Justifica brevemente la representación gráfica obtenida.

Vamos a determinar el valor de a, b y c de la parábola cumpliendo los datos proporcionados.

- Pasa por el punto (0, 0) → $0=0+c \Rightarrow \boxed{c=0}$
- Pasa por el punto $(x,y)=(1,-1) \rightarrow -1=-a-b \Rightarrow a+b=1$
- Mínimo relativo en x = 1 → la derivada en x = 1 es cero.

$$\left.\begin{array}{l} y=-ax^3-bx \Rightarrow y'=-3ax^2-b \\ y'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=-3a-b \Rightarrow b+3a=0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos condiciones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ b+3a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=1-a \\ b+3a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-a+3a=0 \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{b=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}}$$

La función es $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$.

Ya conocemos un mínimo, situado en el punto (1, −1). Hallemos el resto de puntos críticos de la función.

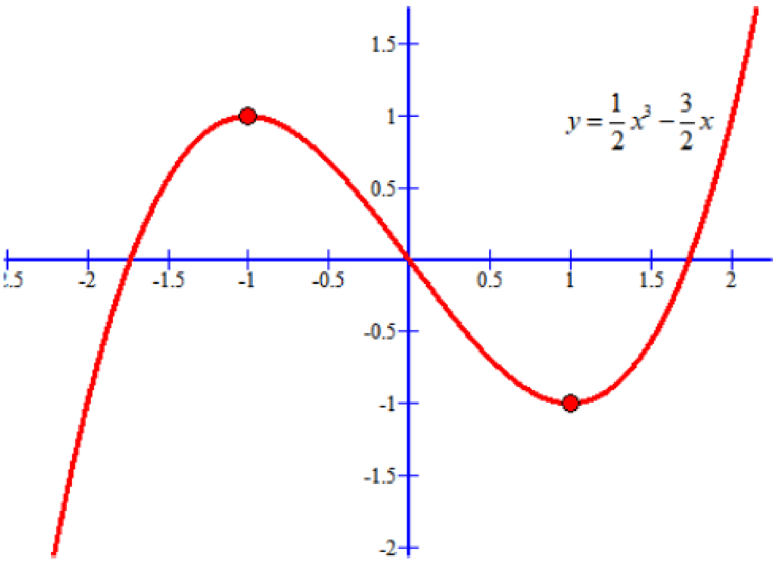
$$y=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x \Rightarrow y'=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}$$

$$y'=0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$y''=3x \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y''(-1)=-3<0 \text{ es un máximo en } x=-1 \\ y''(1)=3>0 \text{ es un mínimo en } x=1 \end{array}\right\}$$

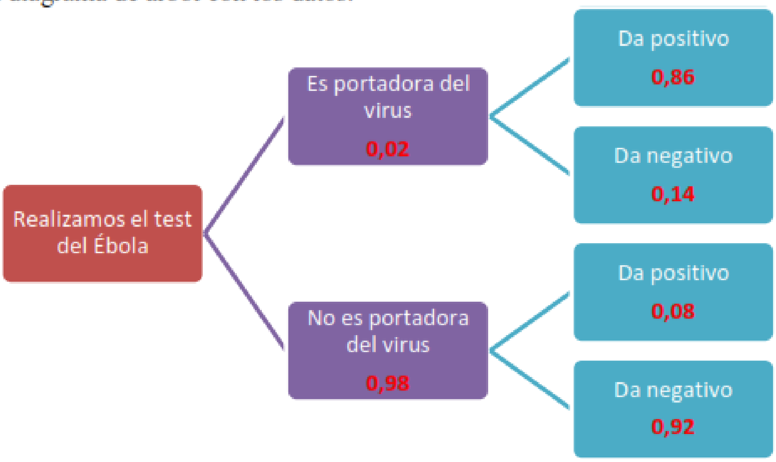
Hacemos una pequeña tabla para situar su gráfica.

x	y
−1	1
0	0
1	−1
2	1



3A- Una multinacional farmacéutica elabora un test para la detección precoz de la enfermedad producida por el virus del Ébola. El test da positivo en el 86% de las personas que son portadoras del virus y da negativo en el 92% de las personas que no son portadoras del virus. Además, en una cierta zona geográfica el 2% de la población es portadora del virus. Se elige al azar una persona de esa zona geográfica y se la somete al test. Calcula razonadamente la probabilidad de que sea portadora del virus sabiendo que el test ha dado positivo.

Realizamos un diagrama de árbol con los datos.



$$P(\text{Portadora del virus / Test ha dado positivo}) = \frac{P(\text{Portadora del virus y Test da positivo})}{P(\text{Test ha dado positivo})} =$$

$$= \frac{P(\text{Portadora del virus y Test da positivo})}{P(\text{Portadora del virus y Test da positivo}) + P(\text{No portadora del virus y Test da positivo})} =$$

$$= \frac{0,02\cdot 0,86}{0,02\cdot 0,86 + 0,98\cdot 0,08} = \frac{172}{172+784} = \frac{172}{956} = \boxed{0,18}$$

4A- Supongamos que tenemos una moneda de 2 euros trucada de manera que la probabilidad de que al lanzarla al aire salga cara es el triple de que salga cruz. Calcula razonadamente la probabilidad de que al lanzarla una vez al aire salga cruz.

Si llamamos p a la probabilidad de salir cruz, se cumple que la probabilidad de salir cara es $3p$. La suma de estas probabilidades es 1, se cumple:

$$p + 3p = 1 \Rightarrow 4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

$\boxed{\text{La probabilidad de salir cruz es } \frac{1}{4}}$ y de salir cara es $\frac{3}{4}$.

OTRA FORMA DE HACERLO

Si la probabilidad de que al lanzar la moneda al aire salga cara es el triple de que salga cruz, debe de ocurrir que por cada vez que salga cruz, saldrá tres veces cara. Cada 4 veces que lance la moneda saldrá una sola vez cruz.

Probabilidad de sacar cruz (según la regla de Laplace) = $\frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \boxed{\frac{1}{4}}$

Opción B

1B- Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y-\left(1-a^2\right)z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases}$$

Calcula razonadamente los valores del parámetro ***a*** para que el sistema tenga soluciones distintas de la solución trivial (0, 0, 0).

El sistema tiene matriz de coeficientes y matriz ampliada asociada

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1+a^2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad A/\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1+a^2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1+a^2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}=4+12-10+10a^2+8-8a^2-2-30=2a^2-18$$

Si igualamos a cero el determinante.

$$|A|=0 \Rightarrow 2a^2-18=0 \Rightarrow a^2-9=0 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3$$

CASO 1. $a \neq \pm 3$

En este caso el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y su solución es la trivial (0, 0, 0).

CASO 2. $a=3$

El sistema queda

$$\begin{cases} x+y+8z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases}$$

El rango de la matriz A es 2. Tiene un menor no nulo (quitamos fila y columna 3ª)

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4-2=2\neq 0$. Como la matriz ampliada y la matriz de coeficientes tienen el mismo rango, ya que la ampliada solo añade una columna con todo ceros.

Rango de A = Rango de A/B < nº incógnitas

Este sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $a=-3$

El sistema queda

$$\begin{cases} x+y+8z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases}$$

Es el mismo caso que el anterior. Sistema compatible indeterminado.

El sistema tiene distintas soluciones de la trivial cuando a = 3 o a = –3.

2B- Un alumno asiste a una clase que dura 60 minutos. Se estima que la capacidad de atención de un alumno en cada instante de tiempo t viene dada por la función $f(t) = -2t^2 + 120t + 5$, con $t \in [0,60]$.
a) Calcula la capacidad de atención cuando lleva una hora de clase. **(1 punto)**
b) Halla el instante de tiempo t (en minutos) en el que la capacidad de atención es máxima. ¿Cuál es la capacidad de atención máxima? **(2 puntos)**

a) $f(60) = -7200 + 7200 + 5 = 5$

b) Hallamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f(t) = -2t^2 + 120t + 5 \Rightarrow f'(t) = -4t + 120$$
$$f'(t) = 0 \Rightarrow -4t + 120 = 0 \Rightarrow -4t = -120 \Rightarrow t = \frac{-120}{-4} = 30 \text{ minutos}$$

Comprobamos que es un máximo.

$$\left.\begin{array}{l} f'(t) = -4t + 120 \Rightarrow f''(t) = -4 \\ t = 30 \text{ minutos} \end{array}\right\} \Rightarrow f''(30) = -4 < 0$$

A los 30 minutos hay una atención máxima. Siendo esta capacidad de atención $f(30) = -1800 + 3600 + 5 = 1805$.

La atención a los 0 minutos y a los 60 minutos es de 5. Por lo que este máximo relativo es un máximo absoluto.

3B- Se sabe que el tiempo de resolución de los exámenes propuestos por un profesor universitario sigue una distribución normal de media 74 minutos.
a) Si en el primer examen de este curso la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue 8 minutos, ¿cuál es la probabilidad de haber necesitado para resolver el examen más de los 90 minutos disponibles?
b) En el segundo examen la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue de 9 minutos. Si se presentaron 36 alumnos a este segundo examen, determina la probabilidad de que el tiempo medio de resolución de esos alumnos fuera inferior a 77 minutos.

X = Tiempo de resolución de un examen en minutos.

X = N(74, **σ**)

a) X = N(74, 8).

$$P(X > 90) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-74}{8} > \frac{90-74}{8}\right) = P(Z > 2) =$$
$$= 1 - P(Z < 0,75) = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228}$$

b) X = N(74, 9) → $\overline{X_{36}} = N\left(74, \frac{9}{\sqrt{36}}\right) \Rightarrow \overline{X_{36}} = N(74,\ 1'5)$

$$P\left(\overline{X_{36}} < 77\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X_{36}} - 74}{1,5} < \frac{77-74}{1,5}\right) = P(Z < 2) = \boxed{0,9772}$$

4B- Se consideran dos sucesos independientes A y B. Si la probabilidad de que ocurra A es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es $\frac{1}{3}$, calcula la probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B.

$P(A)=0{,}5$ y $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

A y B son independientes → $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot P(B)\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{P(B)}{2}\Rightarrow P(B)=\frac{2}{3}$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{5}{6}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$P(A)=0{,}5$ y $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

A y B son independientes → $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot P(B)\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{P(B)}{2}\Rightarrow P(B)=\frac{2}{3}$$

Construimos una tabla de contingencia:

	B	B^c	
A	1/3		1/2
A^c			
	2/3		1

Completamos la tabla:

	B	B^c	
A	1/3		1/2
A^c	1/3		1/2
	2/3	1/3	1

Pasamos las fracciones a denominador común 6 para que sea más fácil restar y sumar.

	B	B^c	
A	2/6	1/6	3/6
A^c	2/6	1/6	3/6
	4/6	2/6	1

La probabilidad pedida es el valor de color verde situado en la celda de la fila A^c y la columna B^c.

$$P(A^c\cap B^c)=\boxed{\frac{1}{6}}$$