Julio 18

Opción A

Ejercicio A1

Una empresa de asistencia ha de enviar enfermeros y médicos a una residencia de mayores para cubrir las vacaciones. Por limitación de espacio, sólo pueden acudir cada vez un máximo de 12 profesionales. Además, en cada visita cada enfermero acumula 2 descansos y cada médico acumula 4 descansos. La empresa sólo dispone de 8 médicos y no le interesa generar más de 36 descansos en cada asistencia. Si la empresa obtiene un beneficio neto de 50 euros por cada enfermero y de 80 euros por cada médico que va a la residencia, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántos enfermeros y médicos han de acudir cada vez a la residencia para obtener el máximo beneficio neto por parte de la empresa de asistencia. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

Incógnitas:

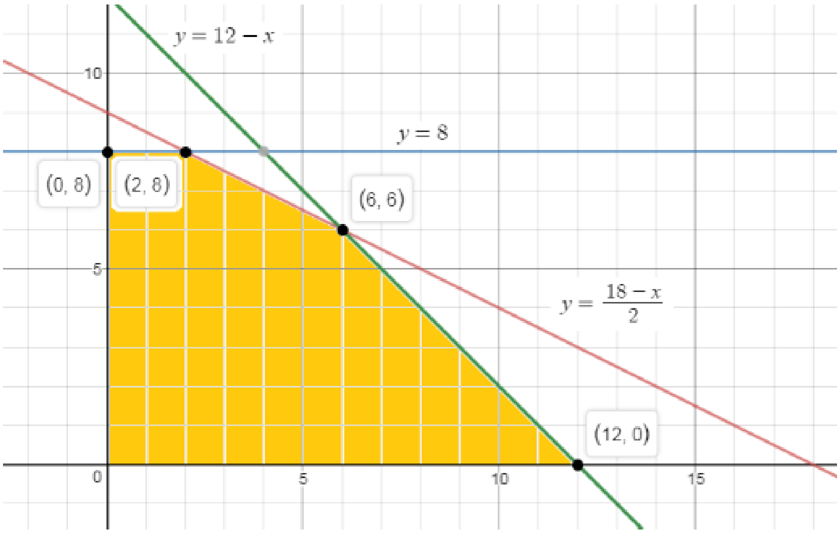
$$x \longrightarrow \text{Número de enfermeros}$$

$$y \longrightarrow \text{Número de médicos}$$

Restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 12 \\ 2x + 4y \leq 36 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y \leq 12 - x \\ y \leq \dfrac{18 - x}{2} \\ y \leq 8 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Región factible y vértices:



Función objetivo (beneficios de la empresa):

$$F(x,y) = 50x + 80y$$

Buscamos el máximo beneficio:

$$F(0,8) = 640, \qquad F(2,8) = 740, \qquad \boxed{F(6,6) = 780}, \qquad F(12,0) = 600$$

De modo que el beneficio máximo es 780 € y se obtiene enviando a 6 enfermeros y 6 médicos al centro.

Ejercicio A2

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax + 10 & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 100/(x-3) + bx^2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$, donde a y b son parámetros.

a) Determina los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y tenga un mínimo relativo en $x = 2$.

La única posible discontinuidad de la función está en el punto de abscisa $x = 5$, por lo que para que la función sea continua, ha de cumplirse:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = f(5)$$

Siendo $f(5) = 5^3 + a \cdot 5 + 10 = 135 + 5a$, impondremos que los límites laterales coincidan:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5} (x^3 + ax + 10) = 135 + 5a \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5} \left(\dfrac{100}{x-3} + bx^2\right) = 50 + 25b \end{array}\right\} \longrightarrow 135 + 5a = 50 + 25b \longrightarrow a - 5b = -17 \quad [\text{Ec. } 1]$$

Además, $f(x)$ posee un mínimo relativo en $x = 2$, por lo que ha de cumplirse que $f'(2) = 0$. Siendo:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + a & \text{si } x \le x \le 5 \\ \dfrac{-100}{(x-3)^2} + 2bx & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Entonces:

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + a = 12 + a = 0 \longrightarrow \boxed{a = -12}$$

Siendo $a = -12$, despejamos b en la ecuación obtenida anteriormente:

$$a - 5b = -17 \longrightarrow -12 - 5b = -17 \longrightarrow -5b = -5 \longrightarrow \boxed{b = 1}$$

b) Para $a = 0$, halla el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0,5]$.

El intervalo $[0,5]$ corresponde al primer tramo de la función que, siendo $a = 0$, está definido por:

$$f(x) = x^3 + 10$$

La gráfica de $f(x) = x^3 + 10$ corta al eje OX cuando $x = \sqrt[3]{-10} \notin [0,5]$. Luego el área buscada es:

$$A = \int_0^5 (x^3 + 10) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + 10x\right]_0^5 = \frac{5^4}{4} + 10 \cdot 5 - 0 = \frac{625}{4} + 50 = \frac{625 + 200}{4} = \boxed{\frac{825}{4}\ \text{u}^2}$$

Ejercicio A3

Se sabe que el salario mensual de los trabajadores de dos empresas A y B sigue la distribución normal.

a) Si en la empresa A el salario mensual medio es de 1 200 € y su desviación típica es 400 euros, ¿cuál es la probabilidad de que un trabajador cobre más de 1 740 euros al mes?

El salario mensual de los trabajadores de la empresa A es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal, de media $\mu = 1\,200$ € y desviación típica $\sigma = 400$ €:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \longrightarrow X \sim N(1\,200, 400)$$

Se nos pide la probabilidad de que el sueldo de un trabajador supere los 1 740 € mensuales, es decir:

$$P(X > 1\,740)$$

Tipificando la variable, podemos recurrir a la tabla de desviación normal estándar $N(0,1)$ y conocer esta probabilidad:

$$P(X > 1740) = P\left(Z > \frac{1\,740 - 1\,200}{400}\right) = P(Z > 1,35) = 1 - P(Z < 1{,}35) = 1 - 0{,}9115 = \boxed{0{,}0885}$$

Es decir, el 8,85 % de los trabajadores cobrarían más de 1 740 euros al mes.

b) Si en la empresa B el 80,23 % de los trabajadores cobra menos de 1 570 euros, calcula la desviación típica del salario mensual sabiendo que el salario medio mensual es de 1 400 euros.

El salario mensual de los trabajadores de la empresa B es una variable aleatoria Y que sigue una distribución normal, de media $\mu = 1\,400$ € y desviación típica σ desconocida:

$$Y \sim N(1\,400, \sigma)$$

En este caso se nos dice que el 80,23 % de los trabajadores cobra menos de 1 570 €, lo que significa:

$$P(Y < 1\,570) = 0{,}8023$$

Tipificando la variable y localizando esta probabilidad en la tabla de distribución normal estándar, se deduce el valor de la desviación típica σ:

$$P\left(Z < \frac{1\,570 - 1\,400}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{170}{\sigma}\right) = 0{,}8023 \longrightarrow \frac{170}{\sigma} = 0{,}85 \longrightarrow \sigma = \frac{170}{0{,}85} = \boxed{200}$$

Ejercicio A4

Se sabe que si ha ocurrido A, la probabilidad de que ocurra B es 0,3. Halla la probabilidad de que, si ha ocurrido A no ocurra B.

Una vez que ha ocurrido A, pueden suceder dos cosas (mutuamente excluyentes): que ocurra B o que no ocurra B. Lógicamente, ha de cumplirse que $P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) + P(\overline{\mathrm{B}}|\mathrm{A}) = 1$. Por lo tanto:

$$P(\overline{\mathrm{B}}|\mathrm{A}) = 1 - P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = 1 - 0{,}3 = \boxed{0{,}7}$$

Opción B

Ejercicio B1

En un hotel se alojaron ayer 25 huéspedes procedentes de tres países, Italia, Portugal y Japón. Su gasto total en el hotel fue de 3 610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada portugués y 160 € a cada japonés. El registro del hotel muestra que el número de portugueses fue la cuarta parte de la suma de los números de huéspedes de los otros dos países. Determina el número de huéspedes de cada uno de los tres países.

Si llamamos x al número de huéspedes italianos, y al número de huéspedes portugueses y z al número de huéspedes japoneses:

$$\begin{cases} x+y+z=25 \\ 140x+130y+160z=3\,610 \\ y=\dfrac{x+z}{4} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+y+z=25 \\ 14x+13y+16z=361 \\ x-4y+z=0 \end{cases}$$

Aplicamos el método de Gauss para resolver el sistema de ecuaciones obtenido:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 14 & 13 & 16 & 361 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-14F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & -1 & 2 & 11 \\ 0 & -5 & 0 & -25 \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$-5y=-25 \longrightarrow \boxed{y=5}$$

$$-y+2z=11 \longrightarrow z=\frac{11+y}{2}=\frac{11+5}{2}=\frac{16}{2} \longrightarrow \boxed{z=8}$$

$$x+y+z=25 \longrightarrow x=25-y-z=25-5-8 \longrightarrow \boxed{x=12}$$

Ejercicio B2

Una empresa de aguas realiza un estudio de mercado y descubre que la curva de beneficios mensuales viene dada, en miles de euros, por la función $B(x)=10x-x^2-21$, donde x representa, en euros, el precio de venta de una caja de botellas. Si este producto se vende en cajas de 10 botellas, calcula el precio de venta de una botella para que el beneficio obtenido sea máximo y calcula el importe de ese beneficio.

Siendo $B(x)$ la función que proporciona el beneficio de la empresa en función del precio x de cada caja de botellas, el máximo beneficio se obtendrá por tanto, cuando el precio x es tal que $B'(x)=0$ y $B''(x)<0$:

$$B'(x)=10-2x=0 \longrightarrow 2x=10 \longrightarrow x=5$$

$$B''(x)=-2<0 \longrightarrow \text{Hay un máximo cuando } x=5$$

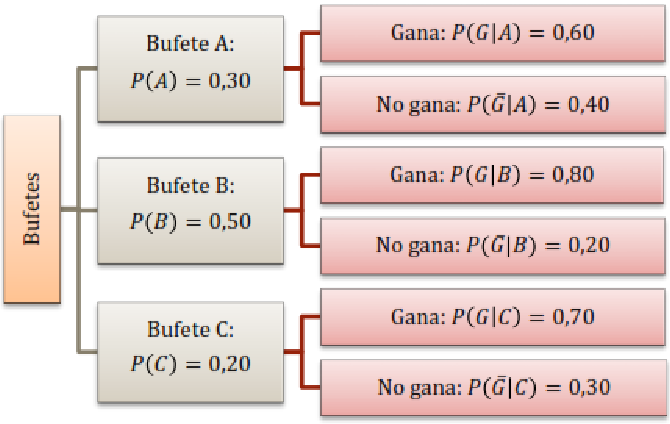
Teniendo en cuenta que x es el precio por caja, y que cada una contiene 10 botellas, el precio de estas para que el beneficio sea máximo debe ser: $\boxed{0{,}50\ \text{€/botella}}$.

Y el beneficio máximo es: $B(5)=10\cdot 5-5^2-21=4 \longrightarrow \boxed{4\,000\ \text{€}}$.

Ejercicio B3

Una corporación informática utiliza tres bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados, el bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados, mientras que el bufete C recibe el 20 % de los casos legales y gana el 70 % de los casos presentados. Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales.

a) Determina la probabilidad de que la empresa gane el caso.



$$P(G) = P(A) \cdot P(G|A) + P(B) \cdot P(G|B) + P(C) \cdot P(G|C) = 0,30 \cdot 0,60 + 0,50 \cdot 0,80 + 0,20 \cdot 0,70$$

$$\boxed{P(G) = 0,72 \longrightarrow 72\ \%}$$

b) Si el caso elegido se ha ganado, calcula la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A.

Se trata de una probabilidad condicionada:

$$P(A|G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{P(A) \cdot P(G|A)}{P(G)} = \frac{0,30 \cdot 0,60}{0,72} \longrightarrow \boxed{P(A|G) = 0,25 \longrightarrow 25\ \%}$$

Ejercicio B4

En una clase de yoga hay 7 mujeres y 12 hombres. Si se escoge a tres personas al azar, halla la probabilidad de que se seleccionen dos mujeres y un hombre.

$$P(MMH) = \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} \cdot \frac{12}{17} = \frac{504}{5814} = 0,0867$$

$$P(MHM) = \frac{7}{19} \cdot \frac{12}{18} \cdot \frac{6}{17} = \frac{504}{5814} = 0,0867$$

$$P(HMM) = \frac{12}{19} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{6}{17} = \frac{504}{5814} = 0,0867$$

$$\boxed{P_{total} = 0,2601 \longrightarrow 26,01\ \%}$$