EXÁMENES EBAU

BLOQUE A

1A- Una familia dispone de 80 euros mensuales para realizar la compra en una carnicería. El primer mes compran 10 kg de carne de pollo, 6 kg de carne de cerdo y 3 kg de ternera y les sobran 3,10 euros. El siguiente mes adquieren 10 kg de carne de pollo, 7 kg de carne de cerdo y 2 kg de carne de ternera y les sobran 5,10 euros. El tercer mes compran 11 kg de carne de pollo, 6 kg de carne de cerdo y 2 kg de carne de ternera, abonando un total de 72 euros y 30 céntimos. Suponiendo que no ha variado el precio de la carne en estos meses, ¿cuánto cuesta el kg de carne de pollo, cerdo y ternera?

(3 puntos)

2A- Una inmobiliaria está interesada en adquirir unos terrenos que pueden ser representados en un determinado plano como la superficie encerrada entre la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ **y la recta** $g(x) = 2x$**.**

a) Halla la representación gráfica simultánea de estas dos funciones.

b) Si una unidad de área en este plano equivale a 1 km^2 y el precio del km^2 es de 30 millones de euros, ¿qué importe debe pagar la inmobiliaria por esos terrenos?

(3 puntos)

3A-

a) Puede suponerse que los salarios de los trabajadores de un país siguen una distribución normal de media 2000 euros y desviación típica desconocida. Si la probabilidad de ganar más de 2100 euros es de 0,33, ¿cuál es la desviación típica?

b) Los salarios en euros de los trabajadores en un segundo país también puede suponerse que siguen una distribución normal con la misma media y con varianza de 40000 euros^2. ¿Es más fácil ganar más de 2100 euros en este segundo país que en el país del apartado anterior?

(3 puntos)

4A- Se lanzan dos dados A y B con las caras numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea múltiplo de 4? **(1 punto)**

SOLUCIÓN DEL BLOQUE A

PREGUNTA 1

Sean x, y, z el precio del kilo de carne de pollo, de cerdo y de ternera, respectivamente. Entonces se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 10x + 6y + 3z = 76{,}9 \\ 10x + 7y + 2z = 74{,}9 \\ 11x + 6y + 2z = 72{,}3 \end{cases}$$

Lo transformamos como sigue:

$$\begin{cases} 10x + 6y + 3z = 76{,}9 \\ 10x + 7y + 2z = 74{,}9 \\ 11x + 6y + 2z = 72{,}3 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \\ E2 - E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} 10x + 6y + 3z = 76{,}9 \\ y - z = -2 \\ x - z = -4{,}6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 10x + 6y + 3z = 76{,}9 \\ y = z - 2 \\ x = z - 4{,}6 \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$10z - 46 + 6z - 12 + 3z = 76{,}9 \Rightarrow 19z = 134{,}9 \Rightarrow z = 7{,}1;\; y = 5{,}1;\; x = 2{,}5$$

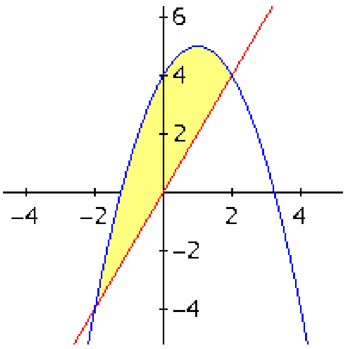
El pollo cuesta a 2,50 €/kg; el cerdo a 5,10 €/kg; la ternera a 7,10 €/kg

PREGUNTA 2

a) Dando valores se obtiene:

x	-2	0	2	4
$f(x)$	-4	4	4	-4
$g(x)$	-4	0	4	

Sus gráficas son las siguientes.



Ambas gráficas se cortan en los puntos de abscisa -2 y 2.

b) El área de la región coloreada viene dada por:

$$\int_{-2}^{2}(-x^2+2x+4-2x)dx=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{8}{3}+8-\left(\frac{8}{3}-8\right)=\frac{32}{3} \text{ u}^2.$$

El importe del terreno será de $\frac{32}{3}\cdot 30=320$ millones de euros.

PREGUNTA 3

a) La variable X que mide los salarios de este país es N (2000, σ), que se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-2000}{\sigma}$.

Como P(X > 2000) = 0,33 ⇒ $P\left(Z>\frac{2100-2000}{\sigma}\right)=P\left(Z>\frac{100}{\sigma}\right)=0{,}33$ ⇒

$$P\left(Z\le\frac{100}{\sigma}\right)=1-0{,}33=0{,}67$$

Por la tabla normal tipificada se tiene que el valor de *Z* correspondiente a 0,67 es 0,44, luego:

$\frac{100}{\sigma}=0{,}44$ ⇒ σ = 227,3 euros.

b) La variable Y que mide los salarios del segundo país es N (2000, 200). Para esta distribución, la P(Y > 2100) =

$$P\left(Z > \frac{2100-2000}{200}\right) = P(Z > 0{,}5) = 1 - P(Z \le 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$$

Por tanto, es más difícil ganar 2100 euros en el segundo país.

PREGUNTA 4

El resultado de la suma de dos dados es el que indicamos en el interior de la siguiente tabla

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La suma es múltiplo de 4 cuando suman 4, 8 y 12.

Por tanto, P(suma múltiplo de 4) =P(suman 4)+P(suman 8)+P(suma 12)=

$$\frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

<u>**Bloque A**</u>

<u>1A-</u> Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte siempre el 20% del total, Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas.

Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno.

Sabiendo que la empresa paga 1 céntimo por cada hoja repartida, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres.

<u>2A-</u> La superficie de media mesa está limitada por las funciones $f(x) = x^2$ **y la recta** $g(x) = 1$**, estando x expresado en metros. El barniz se vende en botes para cubrir una superficie de 2 metros cuadrados.**

¿Cuántos botes necesitaremos comprar para barnizar toda la mesa y cuántos metros cuadrados podríamos barnizar con el barniz sobrante?

<u>3A-</u> El peso de los usuarios de un gimnasio tiene una media desconocida y una desviación típica $\sigma = 5.4kg$ **. Tomamos una muestra aleatoria de 100 usuarios obteniendo una media de 60 kg.**

a) Calcula con un nivel de confianza del 95% el intervalo de confianza para el peso medio de todos los usuarios.

b) Se realiza la siguiente afirmación: "el peso medio de un usuario de ese gimnasio está comprendido entre 58.5 y 61.5 kg.". ¿Con qué probabilidad esta afirmación es correcta?.

<u>4A.-</u> Dos sucesos tienen la misma probabilidad igual a 0.5. La probabilidad de que ocurra uno de los sucesos sabiendo que ha ocurrido el otro es igual a 0.3. ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos?

SOLUCIONES DEL BLOQUE A

2 Calcularemos la superficie de la mesa hallando el área encerrada entre las dos curvas.

Para ello, calculamos los puntos entre los que estará definida la integral igualando las ecuaciones de las gráficas: $x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \; y \; x = 1.$

Por tanto el área de media mesa es, $\int_{-1}^{1} \left|1 - x^2\right| dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} m^2 \Rightarrow Área = \frac{8}{3} m^2$.

Necesitaremos 2 botes para barnizar la mesa y nos sobrará $\frac{4}{3} m^2$ de barniz, es decir nos sobra para barnizar otra media mesa.

3 a) Sabemos que el intervalo de confianza, viene dado por $IC = (\overline{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, siendo σ la desviación típica poblacional, n el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza $1 - \alpha$.

En nuestro caso, para una confianza del 95%, α = 0,05, $Z_{\alpha/2}$ = 1,96, σ= 5,4 , $\overline{x} = 60$ y $n = 100$ obtenemos el $IC = (60 - 1{,}96 \frac{5{,}4}{\sqrt{100}} ; 60 + 1{,}96 \frac{5{,}4}{\sqrt{100}})$ = (58,94 ; 61,06).

b) El intervalo de confianza es

(58,5 ; 61,5) =

$$(60 - Z_{\alpha/2} \frac{5{,}4}{\sqrt{100}}, 60 + Z_{\alpha/2} \frac{5{,}4}{\sqrt{100}}) \Rightarrow 2 \cdot Z_{\alpha/2} \cdot \frac{5{,}4}{\sqrt{100}} = 3 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2{,}78 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}027 \Rightarrow \alpha = 0{,}0054$$

luego la probabilidad pedida es $1 - \alpha = 1 - 0{,}0054 = 0{,}9946$.

4 **C**onsideramos dos sucesos aleatorios A y B, con P(A) = P(B) = 0,5 y, sin pérdida de generalidad, P(A|B)= 0,3.

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}85 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$$

SOLUCIONES DEL BLOQUE B

<u>2B-</u> Una discoteca abre sus puertas a las 10 de la noche sin ningún cliente y las cierra cuando se han marchado todos. Se supone que la función que representa el número de clientes (N) en función del número de horas que lleva abierto, t, es: $N(t) = 80t - 10t^2$.

a) Determina a qué hora el número de clientes es máximo. ¿Cuántos clientes hay en ese momento? b) ¿A qué hora cerrará la discoteca?

a) Para calcular el máximo de la función $N'(t) = 80 - 20t \quad ; \quad N'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

Como $N''(t) = -20 \Rightarrow N''(4) < 0 \Rightarrow \text{En } t = 4 \text{ hay un máximo de la función}$.Es decir, 4 horas después de la apertura (2 de la mañana) el número de clientes es el máximo.

En ese momento hay $N(4) = 160$ clientes.

b) Cierra cuando no hay nadie, es decir cuando el número de clientes es 0.

$N(t) = 80t - 10t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \quad ó \quad t = 8$. Como abre en t=0, cierra 8 horas después de la apertura, es decir a las 6 de la mañana.

<u>BLOQUE A</u>

<u>1A.</u> Sea el sistema:

$$\begin{cases} a^2x + a^3y = 1 \\ x + a^2y = 0 \end{cases}$$

a) En función del número de soluciones, clasifica el sistema para los distintos valores del parámetro *a*.

b) Resuélvelo para *a* = 2.

<u>2A.</u> Sea $C(t)$ el dinero en miles de euros que hay depositado en un día en una sucursal bancaria, en función del tiempo *t* en horas desde que la sucursal está abierta. Sabiendo que $C'(t) = t^2 - 7t + 10$ y que la sucursal permaneció abierta un total de 8 horas:

a) Obtén los máximos y mínimos locales de la función $C(t)$.

b) Obtén la expresión de $C(t)$ sabiendo que a las 6 horas de estar abierta la sucursal disponía de 20 000 euros.

<u>3A.</u> Se juntan 3 clases *A*, *B* y *C* con el mismo número de alumnos en el salón de actos de un instituto. Se sabe que el 10% de los alumnos en la clase *A* son zurdos; en la clase *B*, el 8% son zurdos, y en la clase *C*, el 88% de los alumnos no son zurdos.

a) Si elegimos al azar un alumno del salón de actos, ¿con qué probabilidad el alumno no será zurdo?

b) Sabiendo que un alumno elegido al azar del salón de actos es zurdo, ¿cuál es la probabilidad de que no pertenezca a la clase *C*?

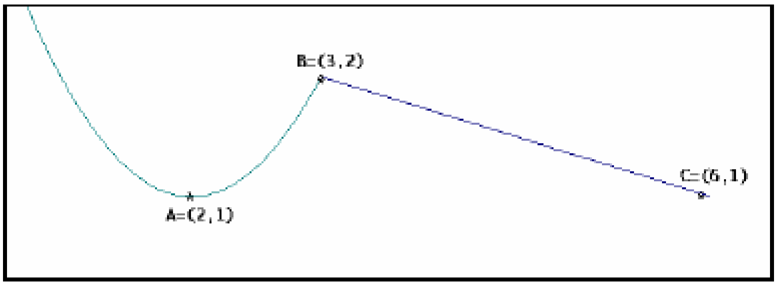
4A. Calcula la probabilidad del suceso $\overline{A} \cap B$ sabiendo que la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos sucesos *A* o *B* es 0,8 y que *P*(*A*) = 0,3.

BLOQUE B

1B. Una fábrica de papel tiene almacenados 4000 kg de pasta de papel normal y 3000 kg de pasta de papel reciclado. La fábrica produce dos tipos diferentes de cajas de cartón. Para el primer tipo se utilizan 0,2 kg de pasta de papel normal y 0,1 kg de pasta de papel reciclado, mientras que para la caja del segundo tipo se utilizan 0,2 kg de pasta de papel normal y 0,3 kg de pasta de papel reciclado. Los beneficios que la fábrica obtiene por la venta de cada caja son, respectivamente, 5 € para el primer tipo y 6 € para el segundo tipo de cajas. Utilizando técnicas de programación lineal, calcula cuántas cajas de cada tipo deben fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto asciende el beneficio máximo obtenido?

2B. Sea $$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \le 3 \\ mx + n & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La representación gráfica de la función *f*(*x*) es la siguiente:



Calcula la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que el punto *A* es el vértice de la parábola.

3B. El coeficiente intelectual de los individuos presentes en una sala puede suponerse que sigue una distribución normal de media μ y varianza igual a 81.

a) ¿Cuánto vale μ si sabemos que solo un 10% de las personas en la sala sobrepasa un coeficiente intelectual de 105?

En los dos siguientes apartados supondremos que μ = 95:

b) Elegida una persona al azar de la sala, ¿cuál es la probabilidad de que su coeficiente intelectual esté entre 86 y 107?

c) Elegimos 9 personas al azar de la sala y calculamos la media de sus coeficientes intelectuales. ¿Cuál es la probabilidad de que esa media esté entre 86 y 107?

4B. Un cartero reparte al azar 3 cartas entre 3 destinatarios. Calcula la probabilidad de que al menos una de las 3 cartas llegue a su destino correcto.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1A

a) Discutiremos el sistema utilizando el método de sustitución.

$$\begin{cases} a^2x + a^3y = 1 \\ x + a^2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x + a^3y = 1 \\ x = -a^2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2(-a^2y) + a^3y = 1 \Rightarrow a^3(1-a)y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{a^3(1-a)} \Rightarrow x = -\frac{a^2}{a^3(1-a)} = -\frac{1}{a(1-a)}$$

Los valores de *x* e *y* no tienen sentido cuando *a* = 0 o *a* = 1, luego:

- Si *a* = 0 o *a* = 1, el sistema será incompatible.
- Si *a* ≠ 0 y *a* ≠ 1, el sistema será compatible determinado.

b) Para *a* = 2 se tiene: $x = -\frac{1}{2(1-2)} = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2^3(1-2)} = -\frac{1}{8}$.

PREGUNTA 2A

a) Los máximos y mínimos locales de la función $C(t)$ se dan en las soluciones de $C'(t) = 0$, que hacen negativa o positiva, respectivamente, a $C''(t)$.

$$C'(t) = t^2 - 7t + 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases}$$

Como $C''(t) = 2t - 7 \Rightarrow C''(2) = -3$ y $C''(5) = 3$. Luego el máximo se da cuando *t* = 2; el mínimo, cuando *t* = 5.

b) $C(t)$ es una primitiva de $C'(t) = t^2 - 7t + 10$. Por tanto,

$$C(t) = \int (t^2 - 7t + 10)dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t + c$$

Como $C(6) = 20000 \Rightarrow$ $20000 = \frac{1}{3}\cdot 6^3 - \frac{7}{2}\cdot 6^2 + 10\cdot 6 + c$ $\Rightarrow c$ = 19994

Luego $C(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t + 19994$

PREGUNTA 3A

Si llamamos *Z* al suceso ser zurdo y *D* a ser diestro, se tienen las siguientes probabilidades:

P(*A*) = 1/3; *P*(*Z*/*A*) = 0,10; *P*(*D*/*A*) = 0,90

P(*B*) = 1/3; *P*(*Z*/*B*) = 0,08; *P*(*D*/*B*) = 0,92

P(*C*) = 1/3; *P*(*Z*/*C*) = 0,12; *P*(*D*/*C*) = 0,88

a) *P*(*Z*) = *P*(*A*) · *P*(*Z*/*A*) + *P*(*B*) · *P*(*Z*/*B*) + *P*(*C*) · *P*(*Z*/*C*) = $\frac{1}{3}(0{,}10 + 0{,}08 + 0{,}12)$ = 0,10

Por tanto, la probabilidad de que no sea zurdo = *P*(*D*) = 1 – 0,10 = 0,90.

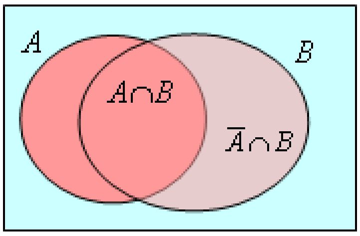
b) La probabilidad de que pertenezca a la clase *C* si es zurdo es:

$$\mathrm{P(C/Z)} = \frac{\mathrm{P(C)\cdot P(Z/C)}}{\mathrm{P(Z)}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}12}{0{,}10} = \frac{2}{5}$$

Luego la probabilidad de que no pertenezca a la clase C es $\mathrm{P(\overline{C}/Z)} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

PREGUNTA 4A

El siguiente diagrama de Venn nos servirá para dar la solución.



Se observa que $\overline{A}\cap B = B - A = B - A\cap B$. Luego $P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$.

También sabemos que

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(\overline{A}\cap B)$$

Por tanto: $0{,}8 = 0{,}3 + P(\overline{A}\cap B) \Rightarrow P(\overline{A}\cap B) = 0{,}5$

PREGUNTA 1B

Se trata de un problema de programación lineal.

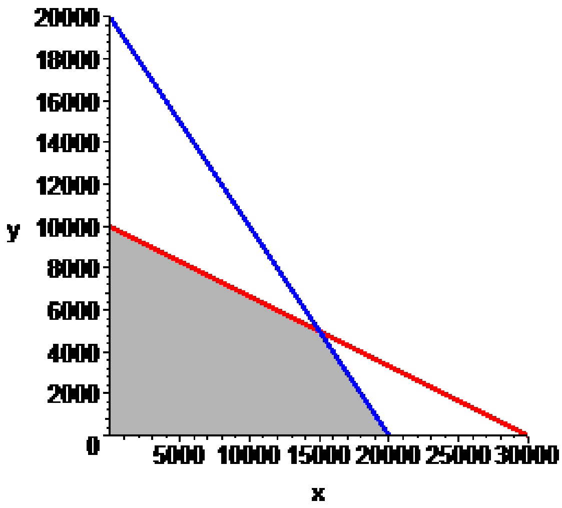
Llamaremos *x* a las cajas del primer tipo fabricadas, e *y*, a las tabletas del segundo tipo. Agrupamos los datos en la siguiente tabla:

	TIPO 1	TIPO 2	Almacenados
Pasta normal	0,2	0,2	4000 kg
Pasta reciclada	0,1	0,3	3000 kg

a) Se trata de maximizar la función objetivo que viene dada como $f(x,y) = 5x + 6y$, sujeta a las restricciones siguientes:

$$\left\{\begin{array}{c} 0{,}2x + 0{,}2y \le 4000 \\ 0{,}1x + 0{,}3y \le 3000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x + y \le 20000 \\ x + 3y \le 30000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right.$$

La región factible viene dada por:



cuyos vértices son los puntos $(0,0),(0,10000),(15000,5000)\ y\ (20000,0)$.

$$\begin{cases} (0,0) \to f(x,y) = 0 \\ (0,10000) \to f(x,y) = 60000 \\ (20000,0) \to f(x,y) = 100000 \\ (15000,5000) \to f(x,y) = 105000 \end{cases}$$

Por tanto, el máximo beneficio es de 105 000 €, y se alcanza con 15 000 cajas del tipo primero y 5000 del tipo segundo.

PREGUNTA 2B

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \le 3 \\ mx + n & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

El primer trozo es una parábola de vértice *A* y que pasa por *B*. Así, $X_v = \dfrac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow -b = 4a$. Sustituyendo en la ecuación y haciendo pasar la parábola por *A* y *B* obtenemos:

$$\begin{cases} -b = 4a \\ 1 = 4a + 2b + c \\ 2 = 9a + 3b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 1 = 4a - 8a + c \\ 2 = 9a - 12a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 1 = -4a + c \Rightarrow a = 1, b = -4, c = 5 \\ 2 = -3a + c \end{cases}$$

Como se ve en la figura, el segundo trozo de la función es la recta que une los puntos *B* y *C*, es decir, la solución del sistema $\begin{cases} 2 = 3m + n \\ 1 = 6m + n \end{cases} \Rightarrow m = -1/3 \quad y \quad n = 3$.

La expresión de la función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si } x \le 3 \\ -1/3\, x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

PREGUNTA 3B

Sea *X* la variable aleatoria que nos representa el cociente intelectual de esos individuos.

X ~ *N*(μ , 9), ya que en el enunciado se nos dice que la varianza es 81.

a) $P(X > 105) = 0{,}1 \to P\left(Z > \dfrac{105-\mu}{9} \right) = 0{,}1$. Buscando el valor en la tabla obtenemos $\dfrac{105-\mu}{9} = 1{,}2875 \Rightarrow \mu = 93{,}435.$

b) *X* ~ *N*(95, 9)

$$P(86 \le X \le 107) = P\left(\frac{86-95}{9} \le Z \le \frac{107-95}{9} \right) = P(-1 \le Z \le 1{,}33) =$$
$$= P(Z \le 1{,}33) - P(Z \le -1) = P(Z \le 1{,}33) - [1 - P(Z \le 1)] = 0{,}9082 - 1 + 0{,}8413 =$$
$$= 0{,}7495$$

c) La media se distribuye *N*(95, 9/3) = *N*(95, 3).

$$P(86 \le media \le 107) = P\left(\frac{86-95}{3} \le Z \le \frac{107-95}{3} \right) = P(-3 \le Z \le 4) =$$
$$= P(Z \le 4) - P(Z \le -3) = P(Z \le 4) - [1 - P(Z \le 3)] = 1 - 1 + 0{,}9987 =$$
$$= 0{,}9987.$$

PREGUNTA 4B

Llamaremos *a*, *b* y *c* a las tres cartas y consideraremos que la carta *a* está bien colocada si se halla en el primer lugar; que la carta *b* está bien colocada si se halla en el segundo lugar, y que la carta *c* está bien colocada si se halla en el tercer lugar.

Las posibles colocaciones de las tres cartas serán: {*abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*}.

$$P(\text{alguna en su destino correcto}) = 1 - P(\text{ninguna en su destino correcto}) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

BLOQUE A

1A- Estudia el siguiente sistema en función del parámetro *a*. Resuélvelo siempre que sea posible, dejando las soluciones en función de parámetros si fuera necesario. Resuélvelo para el caso particular *a* = 3.

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+3z=5 \\ x+3y+az=7 \end{cases}$$

2A- a) Represente simultáneamente las curvas $f(x)=\dfrac{2}{x}-2$ **y** $g(x)=-x+\dfrac{5}{2}$

b) Calcula el área encerrada entre las curvas $f(x)$ **y** $g(x)$**.**

3A- Un bosque de montaña contiene un 50% de pinos, un 30% de abetos y un 20% de abedules. Si sabemos que un árbol es pino, la probabilidad de que esté enfermo es 0,1. Sabiendo que es abedul, la probabilidad de que esté sano es 0,8 y sabiendo que es abeto, la probabilidad de que esté enfermo es de 0,15.

a) Halla la probabilidad de que un árbol esté enfermo.

b) Halla la probabilidad de que sabiendo que un árbol está enfermo sea un abedul.

c) Halla la probabilidad de que un árbol esté enfermo y sea un pino.

4A.- Un jugador de tenis pone en juego un 85% de los saques que realiza. En un juego realizó 10 saques, ¿cuál es la probabilidad de que haya puesto en juego 7 ó más de los 10 saques realizados?

SOLUCIONES DEL BLOQUE A

PREGUNTA 1A.

El sistema puede resolverse aplicando transformaciones de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+3z=5 \\ x+3y+az=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix}\begin{cases} x+y+2z=3 \\ y+z=2 \\ 2y+(a-2)z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-2E2 \end{matrix}\begin{cases} x+y+2z=3 \\ y+z=2 \\ (a-4)z=0 \end{cases}$$

Atendiendo a la tercera ecuación se observa que:

- Si *a* = 4, el sistema resulta compatible indeterminado, pues queda la ecuación $0 \cdot z=0$, que se pierde: sería un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas.

En este caso, el sistema equivalente es $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ y+z=2 \end{cases}$.

Haciendo *z* = *t*, despejando y sustituyendo, se obtiene:

$$\begin{cases} x = 3 - y - 2z \rightarrow x = 3 - (2-t) - 2t = 1 - t \\ y = 2 - z \rightarrow y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

• Si *a* ≠ 4, el sistema resulta compatible determinado. En este caso, la solución se halla despejando en la tercera ecuación y sustituyendo en las otras dos. Así:

$$\begin{cases} x = 3 - y - 2z \rightarrow x = 1 \\ y = 2 - z \rightarrow y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Como la solución no depende de *a* siempre que *a* ≠ 4, para el caso particular de *a* = 3, la solución sigue siendo la dada: *x* = 1; *y* = 2; *z* = 0.

PREGUNTA 2A.

Ambas curvas pueden representarse dando valores, pues la primera es una hipérbola y la segunda una recta.

En el caso de la hipérbola, $f(x) = \frac{2}{x} - 2$, puede observarse:

1. No está definida en *x* = 0, siendo la recta *x* = 0 asíntota vertical de la curva.

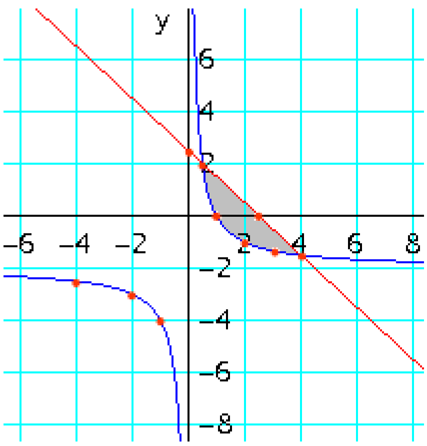
En efecto: $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{2}{x} - 2 \right) = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{x} - 2 \right) = +\infty$.

3. La recta *y* = −2 es asíntota horizontal, ya que $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x} - 2 \right) = -2$.

2. Siempre es decreciente, pues $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ toma valores negativos en todo su dominio.

Algunos puntos de $f(x)$ son: (−3, −8/3); (−2, −3); (−1, −4); (1, 0); (2, −1); (3, −4/3).

Dos puntos de la recta son: (0, 5/2) y (3, −1/2).



b) Las curvas se cortan cuando $\frac{2}{x} - 2 = -x + \frac{5}{2} \Rightarrow$

$4 - 4x = -2x^2 + 5x \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4,\ x = \frac{1}{2}$

El área encerrada entre las curvas, que es la del recinto sombreado, viene dada por la integral definida

$$\int_{1/2}^{4}\left(-x+\frac{5}{2}-\left(\frac{2}{x}-2\right)\right)dx = \int_{1/2}^{4}\left(-x-\frac{2}{x}+\frac{9}{2}\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}-2\ln x+\frac{9}{2}x\right]_{1/2}^{4} =$$

$$= 10-2\ln 4-\left(\frac{17}{8}-2\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{63}{8}-2\ln 4+2\ln\frac{1}{2}=\frac{63}{8}-6\ln 2$$

PREGUNTA 3A.

Si se designan por P, A y B los sucesos ser pino, abeto o abedul, se tienen las siguientes probabilidades:

P(P) = 0,5; P(A) = 0,3; P(B) = 0,2

Si E es el suceso estar enfermo un árbol, se conocen las siguientes probabilidades condicionadas:

P(E/P) = 0,1; P(E/A) = 0,15; P(E/B) = 0,2 = 1 − 0,8.

a) P(árbol esté enfermo) = P(E) = P(P) · P(E/P) + P(A) · P(E/A) + P(B) · P(E/B) =

= 0,5 · 0,1 + 0,3 · 0,15 + 0,2 · 0,2 = 0,135

b) P(A/E) = $\frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}2}{0{,}135}=\frac{40}{135}=\frac{8}{27}$.

c) P(E $\cap$ P) = P(P) · P(E/P) = 0,5 · 0,1 = 0,05

PREGUNTA 4A.

El número, X, de saques puestos en juego sigue un distribución binomial B(10, 0,85).

P(poner en juego 7 o más de los 10 saques realizados) =

= P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =

$$= \binom{10}{7}0{,}85^7\cdot 0{,}15^3 + \binom{10}{8}0{,}85^8\cdot 0{,}15^2 + \binom{10}{9}0{,}85^9\cdot 0{,}15 + \binom{10}{10}0{,}85^{10} =$$

= 0,1298 + 0,2759 + 0,3474 + 0,1969 = 0,95

EJERCICIO 1 [3 puntos]

Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -3 & 2\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}$**.**

Halla una matriz *X* tal que: 2*X* − *BA* = *AB*.

Despejando *X* se tiene: $2X = AB + BA \Rightarrow X = \frac{1}{2}(AB+BA)$

Haciendo los productos se tiene:

$$AB = \begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -3 & 2\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6 & 7 & -7\\ 1 & -7 & -4\\ 20 & -7 & 14\end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -3 & 2\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & -3 & 1\\ 16 & -6 & -5\\ -17 & -8 & -2\end{pmatrix}$$

Luego,

$$AB+BA = \begin{pmatrix}-6 & 7 & -7\\ 1 & -7 & -4\\ 20 & -7 & 14\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9 & -3 & 1\\ 16 & -6 & -5\\ -17 & -8 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4 & -6\\ 17 & -13 & -9\\ 3 & -15 & 12\end{pmatrix}$$

De donde:

$$X = \frac{1}{2}(AB+BA) = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 2 & -3\\ \frac{17}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{9}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{15}{2} & 6\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2 [3 puntos]

La cantidad *C* de tomates (en kg) que se obtienen de una planta de tomate depende de la cantidad de abono *x* (en gramos) que se añade en el proceso de siembra según la función $C(x)=10^{-5}(x+20)^2(a-x)$, donde $x \in [0, 200]$ y *a* es un parámetro.

a) Determina el valor de *a* sabiendo que con 130 gramos de abono se recogen 20,25 kg de tomate.

b) Supuesto *a* = 220, calcula la cantidad de abono que debe echar un agricultor en cada planta para recoger la máxima cantidad de tomates. ¿Cuál es esa máxima cantidad de tomates?

a) $C(x)=10^{-5}(x+20)^2(a-x)$.

Si $C(130)=20{,}25 \Rightarrow 20{,}25=10^{-5}(130+20)^2(a-130) \Rightarrow 20{,}25=\frac{22\,500}{100\,000}\cdot(a-130) \Rightarrow$

$\Rightarrow a-130=\frac{20\,250}{225} \Rightarrow a = 220$

b) Si *a* = 220, la función es $C(x)=10^{-5}(x+20)^2\cdot(220-x)$.

Derivando e igualando a 0:

$C'(x)=10^{-5}\left[2(x+20)\cdot(220-x)+(x+20)^2\cdot(-1)\right]=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow C'(x)=10^{-5}(x+20)\left[2(220-x)-(x+20)\right]=0 \Rightarrow C'(x)=10^{-5}(x+20)\left[420-3x\right]=0 \Rightarrow x =$ −20; *x* = 140.

La solución *x* = −20 hay que descartarla.

La derivada segunda:

$C'(x)=10^{-5}(-3x^2+360x+8400) \Rightarrow C''(x)=10^{-5}(-6x+360)$

Como $C''(140)<0$, para ese valor se da el máximo buscado.

La cantidad de tomates para *x* = 140 es $C(140)=10^{-5}(140+20)^2\cdot(220-140)=20{,}48$ kg

EJERCICIO 3 [3 puntos]

Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se realizan dos tiradas con el dado elegido.

a) Calcula la probabilidad de sacar 5 en la primera tirada y 6 en la segunda.

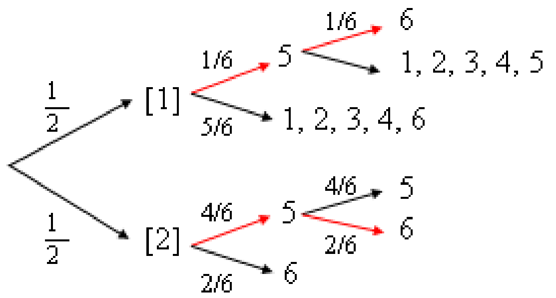
b) Si el resultado de la primera tirada es 5 y el resultado de la segunda tirada es 6, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado?

Sea [1] el dado normal y [2] el dado trucado.

Se tienen las siguientes probabilidades: $P(5/[1]) = \frac{1}{6}$, $P(6/[1]) = \frac{1}{6}$; $P(5/[2]) = \frac{4}{6}$, $P(6/[2]) = \frac{2}{6}$.

La probabilidad de elegir los dados [1] o [2] es 0,5 en cada caso.

En el diagrama de árbol siguiente se indica el experimento.



a) $P(5 \text{ y } 6 \text{ consecutivamente}) = P([1]) \cdot P(5/[1]) \cdot P(6/[1]) + P([2]) \cdot P(5/[2]) \cdot P(6/[2]) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{9}{72}=\frac{1}{8}$$

b) $P([2]/1^{\text{º}}\, 5 \text{ y } 2^{\text{º}}\, 6) = \dfrac{P([2])\cdot P(5/[2])P(6/[2])}{P(5 \, y\, 6)} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{8}} = \frac{64}{72} = \frac{8}{9}$.

EJERCICIO 4 [1 punto]

En el juego del tiro al plato Antonio acierta el plato el 55% de las veces que dispara. En cambio María falla en el 40% de las tiradas. Si disparan los dos a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que ambos acierten?

$P(\text{acertar Antonio}) = P(A) = 0,55$.

$P(\text{acertar María}) = P(M) = 1 - P(\text{fallar María}) = 1 - 0,40 = 0,60$.

Como se trata de dos sucesos independientes, $P(A \cap M) = P(A) \cdot P(M) = 0,55 \cdot 0,60 = 0,33$.

<u>BLOQUE A</u>

<u>A1</u>. Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones, para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones. Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones y para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua. Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 euros, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 euros. Calcule, utilizando técnicas de programación lineal, cómo debe organizarse el convoy para que su coste sea mínimo ¿Cuánto es el coste de la solución óptima?

<u>A2.</u> Una cadena local de TV ha determinado, por medio de encuestas, que el porcentaje de ciudadanos que la ven entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función: $S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$ **, donde *t* indica las horas transcurridas desde las 12 en punto de la mañana.**

a) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia la cadena entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche? ¿Qué porcentaje de ciudadanos ven la cadena de TV a esas horas de máxima y mínima audiencia?

b) Dibuja la gráfica de la función $S(t)$ **para *t* comprendido entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche.**

<u>A3.</u> En una encuesta se pregunta a 10 000 estudiantes de Bachillerato sobre su consumo semanal de refrescos, encontrándose una media muestral de 5 refrescos. Se supone una desviación típica de la población de $\sigma = 2$ refrescos.

a) Halle el intervalo de confianza para el consumo medio semanal de refrescos en toda la población de estudiantes de Bachillerato, con un nivel de confianza del 80%.

b) Si aceptamos un error máximo de ± 0,25 refrescos para la estimación de la media poblacional con un nivel de confianza del 80%, ¿a cuántas personas es necesario entrevistar?

<u>A4.</u> En una reunión hay 7 personas de las que 4 son médicos y 3 abogados. Si elegimos dos personas de la reunión al azar, ¿cuál es la probabilidad de que uno sea médico y otro abogado?

<u>BLOQUE B</u>

<u>B1.</u> Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$**.**

a) Pruebe que $A^2-2A+I=O$**, donde *I* es a la matriz identidad y *O* es una matriz con todos sus elementos iguales a 0.**

b) Calcule A^3**.**

<u>B2.</u> Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ **, se pide:**

a) Represente la función $f(x)$**.**

b) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ **en el punto** $x=\dfrac{1}{2}$ **.**

c) Halle el área limitada por la recta $y=-4x+4$ **y la parte positiva de los ejes de coordenadas.**

<u>B3.</u> En cierta población, un 20% de los trabajadores trabaja en la agricultura, un 25% en la industria y el resto en el sector servicios. Un 63% de los que trabajan en la agricultura son mayores de 45 años, siendo el porcentaje de mayores de 45 años del 38% y el 44% en los otros sectores respectivamente.

a) Seleccionando un trabajador al azar, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 45 años?

b) Si sabemos que un trabajador es mayor de 45 años, ¿qué probabilidad hay de que proceda de la agricultura?

<u>B4.</u> El 10% de las personas tiene miedo a las arañas, el 30% a las ratas y el 8% a las dos, ¿cuál es la probabilidad de que una persona no tenga miedo a ninguna de las dos?

<u>SOLUCIONES DEL BLOQUE A</u>

CUESTIÓN A1.

Se trata de un problema de Programación Lineal.

Llamaremos "*x*" al número de camiones que se usarán para agua e "*y*" al número de camiones para medicinas.

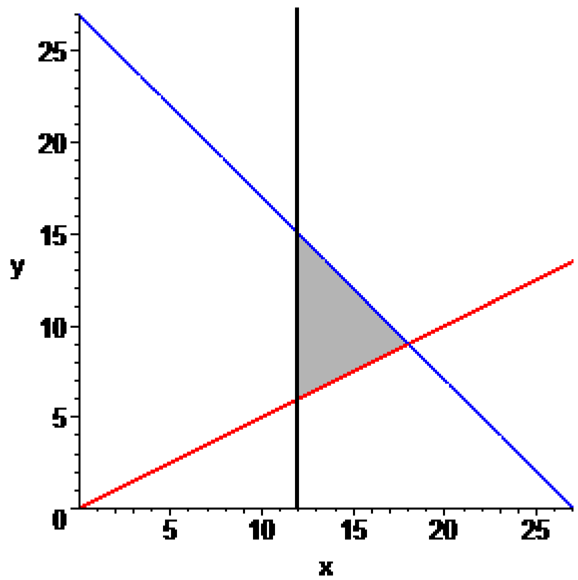
Podemos plantar el problema de la siguiente manera:

$$Mín\ f(x,y) = 9000x + 6000y$$

$$\begin{cases} x + y \leq 27(azul) \\ y \geq \dfrac{x}{2}(rojo) \\ x \geq 12(negro) \end{cases}$$

, donde *x* e *y* deben ser enteros positivos.

La región factible asociada a este problema es



Las soluciones de un PPL están en los vértices de la región, es decir, entre los puntos:

- Negro y rojo: (12, 6)
- Negro y azul: (12, 15)
- Azul y rojo: (18, 9)

En dichos puntos, la función objetivo vale:

$$\begin{cases} f(12{,}6) = 144000 \\ f(12{,}15) = 198000 \\ f(18{,}9) = 216000 \end{cases}.$$

Por tanto, el mínimo coste (144 000 €) se alcanza con 12 camiones de agua y 6 de medicinas.

CUESTIÓN A2.

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$$

a) $S'(t) = -231 + 54t - 3t^2 \Rightarrow -231 + 54t - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 7, t = 11.$

$$S''(t) = 54 - 6t \Rightarrow \begin{cases} S''(7) = 12 > 0 \rightarrow mínimo \\ S''(11) = -12 < 0 \rightarrow máximo \end{cases}.$$

Por tanto, la hora de menor porcentaje de audiencia son las 7 de la tarde y es del $S(7) = 23\%.$

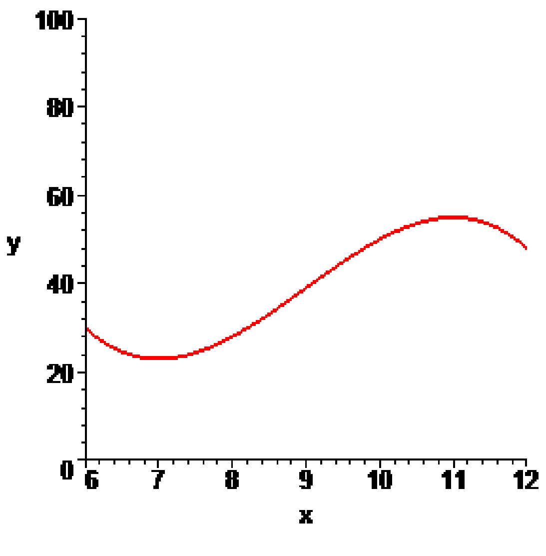
La hora de mayor porcentaje de audiencia son las 11 de la noche y es de $S(11) = 55\%.$

b) Para dibujar una función de grado tres es suficiente con conocer los puntos de corte con los ejes, los extremos y la monotonía de la función.

La función no corta a los ejes en ese intervalo. Además, sabemos que el mínimo de la función es el punto (7, 23) y el máximo es (11, 55).

También, la función pasa por el punto (6, 30) y por (12, 48).

Podemos, pues, dibujar la función como sigue:



CUESTIÓN A3.

Sea *X* la variable aleatoria que mide el consumo medio semanal de refrescos de los estudiantes de Bachillerato, donde *X*~*N* (5;2).

Sabemos que el intervalo de confianza, viene dado por $IC = \left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$,

siendo σ la desviación típica poblacional, *n* el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza $1 - \alpha$.

En nuestro caso, para una confianza del 80%, α = 0,2, $Z_{\alpha/2}$ = 0,845, tenemos el

$$IC = \left(5 - 0{,}845\frac{2}{\sqrt{10000}};5 + 0{,}845\frac{2}{\sqrt{10000}}\right) = (4{,}9831;5{,}0169).$$

b) Sabemos que el error admitido *E*, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo σ la desviación típica poblacional, *n* el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza $1 - \alpha$.

Por tanto, $n = (Z_{\alpha/2})^2\dfrac{\sigma^2}{E^2}$

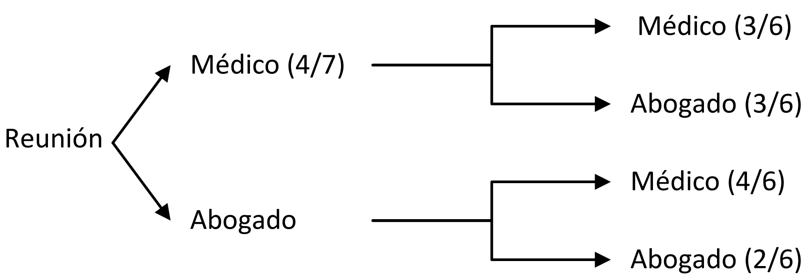
En nuestro caso, para una confianza del 80%, α = 0,2, $Z_{\alpha/2}$ = 0,845, σ= 2 y *E* < 0,25, se tendrá:

$$n > (0{,}845)^2\frac{2^2}{0{,}25^2} = 45{,}6976$$

Por tanto, el tamaño mínimo debe ser de 46.

CUESTIÓN A4.

Podemos representar la situación del problema mediante un diagrama de árbol de la siguiente manera:



$$P(\text{uno médico y otro abogado}) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} = \frac{4}{7} = 0{,}571.$$

SOLUCIONES DEL BLOQUE B

CUESTIÓN B1.

a) Multiplicando se tiene:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A = 2\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Nota: También se podría comprobar que $A^2 - 2A + I = (A - I)^2 = O$.

b) Como $A^2 - 2A + I = O \Rightarrow A^2 = 2A - I \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (multiplicando por *A*) $A^3 = 2A^2 - A \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (sustituyendo) $A^3 = 2(2A - I) - A = 3A - 2I$

Luego,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 15 & -12 & 6 \\ 6 & -3 & 3 \\ -12 & 12 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -12 & 6 \\ 6 & -5 & 3 \\ -12 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Nota: También se podría hacer

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -12 & 6 \\ 6 & -5 & 3 \\ -12 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

CUESTIÓN B2.

a) La función no está definida en x = 0, valor para el que se tiene una asíntota vertical, pues $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

También tiene una asíntota horizontal, la recta y = 0, pues $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Posición de la curva respecto de las asíntotas.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ ; } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \text{ y } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

Crecimiento y decrecimiento; concavidad y convexidad.

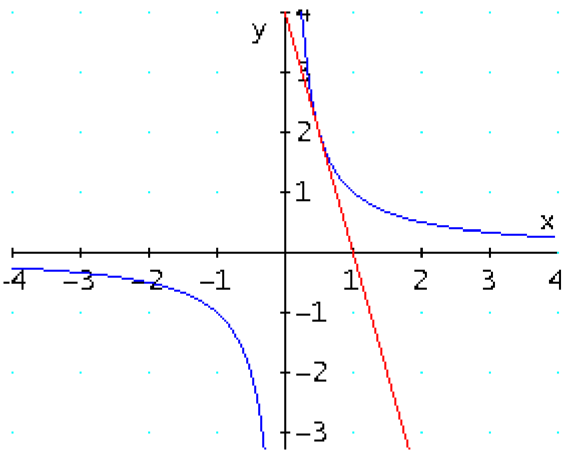
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ ; } f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Como la derivada es negativa para todo $x \in \mathbf{R} - \{0\}$, la función es decreciente siempre.

Como $f''(x)$ < 0 si x < 0, para esos valores la función es cóncava ($\cap$). Análogamente, como $f''(x)$ > 0 si x > 0, la función es convexa ($\cup$) cuando x > 0.

Dando algunos valores:

[(0,25, 4); (0,5, 2); (1, 1); (2, 0,5); …], se puede trazar la gráfica adjunta:



b) La ecuación de la recta tangente a f (x) en el punto (a, f (a)) es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

En este caso,

$$y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -4x + 4$$

c) La figura formada por la recta $y = -4x + 4$ y los ejes de coordenadas es un triángulo de base 1 y altura 4. Su área es $S = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2$.

<u>Nota</u>. Si lo que se buscaba era la aplicación del cálculo integral,

$$S = \int_0^1 (-4x + 4)dx = \left(-2x^2 + 4x\right)\Big|_0^1 = -2 + 4 = 2$$

CUESTIÓN B3.

Llamemos *A*, *I* y *S* a los sucesos trabajar en la agricultura, en la industria o en el sector servicios, respectivamente. Designamos por +45 el suceso ser mayor de 45 años, y por –45 su contrario.

Ordenamos los datos del problema.

(%)	A	I	S
+45	63	38	44
–45	37	62	56
Total	20	25	55

Los datos en azul se han deducido por complementariedad.

a) Con esto y aplicando la probabilidad total, se tiene:

$P(-45) = P(A) \cdot P(-45/A) + P(I) \cdot P(-45/I) + P(S) \cdot P(-45/S) =$

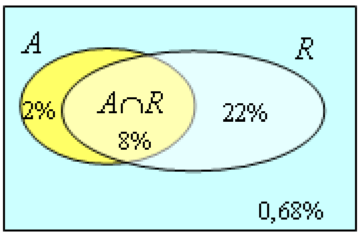
$= 0{,}20 \cdot 0{,}37 + 0{,}25 \cdot 0{,}62 + 0{,}55 \cdot 0{,}56 = 0{,}537$

b) Por la formula de Bayes,

$$P(A/+45) = \frac{P(A \cap +45)}{P(+45)} = \frac{P(A \cap +45)}{1 - P(-45)} = \frac{0{,}20 \cdot 0{,}63}{0{,}463} = \frac{126}{463} \approx 0{,}27$$

CUESTIÓN B4.

Puede hacerse un diagrama de Venn como el sigue.



Llamamos *A* al suceso tener miedo a las arañas y *R* al suceso tener miedo a las ratas.

Sus probabilidades son:

$P(A) = 0,10$; $P(R) = 0,30$; $P(A \cap R) = 0,08$

Luego, por la probabilidad de la unión, que da la probabilidad de tener miedo a alguna de esas dos especies, se tiene:

$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{R}) = 0,10 + 0,30 - 0,08 = 0,32$

Su complementario es el suceso no tener miedo a ninguno de esos dos bichos, y es:

P (no temer a arañas y ratas) = 1 – 0,32 = 0,68.

BLOQUE A

1A- En una fábrica trabajan 22 personas entre electricistas, administrativos y directivos. El doble del número de administrativos más el triple del número de directivos, es igual al doble del número de electricistas.

a) ¿Es posible saber con estos datos el número de electricistas que hay?

b) Si además se sabe que el número de electricistas es el doble del de administrativos. ¿Cuántas personas hay de cada tipo?

(3 puntos)

2A- Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$**.**

a) Calcula sus asíntotas y el dominio de definición de la función.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Representa gráficamente la función $f(x)$**.**

d) Obtén la expresión de la recta tangente a dicha función en x = 3.

(3 puntos)

3A- Las ausencias en días de un empleado de una empresa para un determinado año se aproximan por una distribución normal de media μ días y desviación típica σ = 2 días. Se pretende estimar μ usando la media $\overline{X}$ de las ausencias en ese año de *n* trabajadores seleccionados de forma aleatoria en la empresa.

a) Si suponemos μ = 6,3 y que *n* = 25, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ esté comprendida entre 6,1 y 6,5 días?

b) ¿Qué tamaño *n* debería tener la muestra aleatoria para poder estimar μ usando la media muestral $\overline{X}$ con un error máximo (diferencia entre μ y X) de ± 0,2 días con una confianza del 95%?

(3 puntos)

4A- Sabiendo que $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ = 0,55, $P(A)$ = 0,4 y $P(B)$ = 0,35, ¿son independientes *A* y *B*?

(1 punto)

SOLUCIÓN DEL BLOQUE A

PREGUNTA 1

Sean E, A y D el número de electricistas, administrativos y directivos.

Se tiene que:

E + A + D = 22

2A + 3D = 2E

a) Con estos datos no es posible saber el número de electricistas que hay, pues se trata de un sistema con tres incógnitas y solo dos ecuaciones. Así, si despejamos E en la primera ecuación y sustituimos en la segunda, queda:

E = 22 – A – D $\Rightarrow$ 2A + 3D = 2(22 – A – D) $\Rightarrow$ 2A + 3D = 44 – 2A – 2D $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 4A + 5D = 44

b) Si además se sabe que E = 2A, entonces:

$$\begin{cases} E+A+D=22 \\ 2A+3D=2E \\ E=2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A+A+D=22 \\ 2A+3D=4A \\ E=2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A+D=22 \\ -2A+3D=0 \\ E=2A \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D=22-3A \\ -2A+3(22-3A)=0 \\ E=2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=22-3A \\ 11A=66 \\ E=2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=4 \\ A=6 \\ E=12 \end{cases}$$

Hay 12 electricistas, 6 administrativos y 4 directivos.

PREGUNTA 2

a) La función está definida para todo x ≠ 2, pues para ese valor se anula el denominador luego Domf(x)=R-$\{2\}$

En ese punto hay una asíntota vertical, pues $\underset{x\to 2}{lím}\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{2}{0}=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{2}{0^+}=\infty \end{cases}$. La asíntota es x = 2.

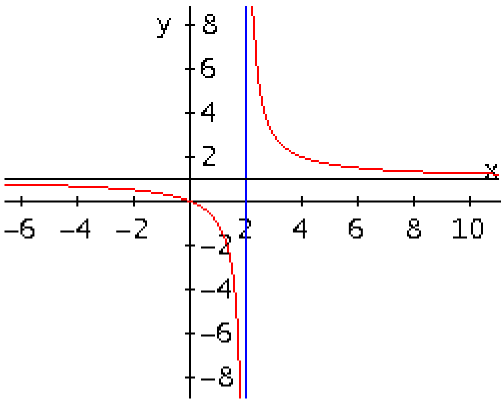
La curva también tiene una asíntota horizontal, pues $\underset{x\to\infty}{lím}\dfrac{x}{x-2}=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x-2}=1$. La asíntota es la recta y = 1.

Como es una función racional y tiene asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

b) Derivando: $f'(x) = \dfrac{x-2-x}{(x-2)^2} = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$.

Como la derivada toma valores negativos para todo valor de x ≠ 0, la función es decreciente en todo su dominio.

c) Teniendo en cuenta lo anterior y dando algunos valores; por ejemplo: (0, 0); (1, – 1); (3, 3); (4, 2); … se obtiene la gráfica siguiente:



d) La ecuación de la recta tangente a *f*(x) en el punto (*a*, *f*(*a*)) es:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

En este caso, como $f(3) = 3$ y $f'(3) = -2$, la tangente es

$$y - 3 = -2(x-3) \Leftrightarrow y = -2x + 9$$

PREGUNTA 3

a) La media de las muestras de tamaño *n* obtenidas en una población de media μ y desviación típica σ, N(μ. σ), se distribuye según una normal N$\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En nuestro caso: N(6,3; 2) → (si n = 25) → N$\left(6{,}3; \dfrac{2}{\sqrt{25}}\right)$ ≡ N(6,3; 0,4)

Esta distribución se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 6{,}3}{0{,}4}$

Con esto,

P(6,1 < X < 6,5) = P$\left(\frac{6{,}1-6{,}3}{0{,}4} < Z < \frac{6{,}5-6{,}3}{0{,}4}\right)$ = P(–0,5 < Z < 0,5) =

= P(Z < 0,5) – P(Z < –0,5) = P(Z < 0,5) –(1- P(Z < 0,5))= 2P(Z < 0,5) –1 = 2 · 0,6915 – 1 = 0,383

b) El error admitido, *E*, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo σ la desviación típica poblacional, *n* el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza $1-\alpha$.

En nuestro caso, para una confianza del 95%, $Z_{\alpha/2}$ = 1,96, σ = 2 y *E* < 0,2, se tendrá:

$1{,}96\frac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}2$ $\Rightarrow$ $\sqrt{n} > 19{,}6$ $\Rightarrow$ *n* > 384,16

El tamaño muestral debe ser n ≥ 385 días.

PREGUNTA 4

Los sucesos A y B son independientes si se cumple que P(A$\cap$B) = P(A) · P(B).

Sabemos también que:

$P(\overline{A}\cap\overline{B})$ = 1 – P(A$\cup$B) y P(A$\cup$B) = P(A) + P(B) – P(A$\cap$B)

Con esto: 0,55 = 1 – P(A$\cup$B) $\Rightarrow$ P(A$\cup$B) = 0,45

Luego: 0,45 = 0,4 + 0,35 – P(A$\cap$B) $\Rightarrow$ P(A$\cap$B) = 0,30

Como P(A) · P(B) = 0,4 · 0,35 = 0,14 ≠ P(A$\cap$B) = 0,30, los sucesos A y B no son independientes.

Otra manera sería la siguiente:

Ay B son independientes si sus sucesos contrarios lo son, esto es, si
$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}) = (1-P(A))\cdot(1-P(B)) = 0{,}6\cdot 0{,}75 = 0{,}45$

Y como los valores son distintos, los sucesos son dependientes.

BLOQUE A

1A. Calcula dos matrices cuadradas A y B sabiendo que $2A+3B=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ **y que** $A-B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. **(3 puntos)**

2A. Se considera la parábola $p(x)=-0{,}5x^2+1{,}5x$ **y sea** $s(x)$ **la línea poligonal que se obtiene uniendo los puntos (0, 0), (1, 1), (2, 1) por segmentos de recta. Representa el recinto limitado por la parábola y la poligonal y calcula su área. (3 puntos)**

3A. El estudio sobre los créditos concedidos por un banco multinacional el pasado año revela que el 42% de dichos créditos se ha concedido a clientes españoles, el 33% a clientes del resto de la Unión Europea y el 25% a clientes del resto del mundo. De esos créditos, los créditos hipotecarios suponen, respectivamente, el 30%, el 24% y el 14%. Elegido un cliente al azar que ha recibido un crédito, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito concedido no sea hipotecario? (3 puntos)

4A. Un examen consta de 6 preguntas con 4 posibles respuestas cada una, de las que solo una de ellas es correcta. Un estudiante que no se había preparado la materia responde completamente al azar marcando una respuesta aleatoriamente. Calcula la probabilidad de que acierte 4 o más preguntas. (1 punto)

SOLUCIÓN DEL BLOQUE A

Pregunta 1

Es un sistema lineal.

$$2A+3B=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Multiplicando por 3 la segunda ecuación y sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, se tiene:

$$5A=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -5 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Sustituyendo y despejando en la segunda ecuación:

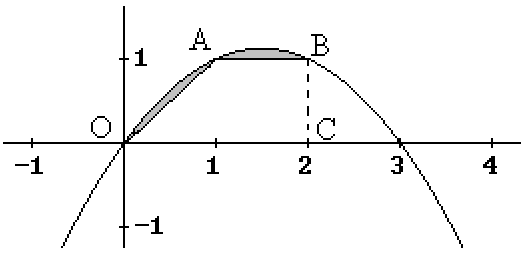
$$B=A-\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Pregunta 2

Damos algunos valores para trazar la parábola:

x	0	1	2	3
$p(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}5x$	0	1	1	0

El recinto es el sombreado en la siguiente figura.



Su área viene dada por la diferencia de la determinada por debajo del arco parabólico entre 0 y 2 y la del trapecio de vértices OABC. Y vale:

$$S = \int_0^2 (-0{,}5x^2 + 1{,}5x)dx - \frac{(2+1)\cdot 1}{2} = \left[-\frac{0{,}5}{3}x^3 + \frac{1{,}5}{2}x^2 \right]_0^2 - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3} + 3 - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

Pregunta 3

Si denotamos por ES, UE y RM los sucesos “cliente español”, “del resto de la Unión Europea” y “del resto del mundo”, respectivamente; y por H el suceso “el crédito es hipotecario” se tiene:

P(ES) = 0,42; P(UE) = 0,33; P(RM) = 0,25

Tenemos también las siguientes probabilidades condicionadas:

P(H/ES) = 0,30; P(H/UE) = 0,24; P(H/RM) = 0,14

Con esto:

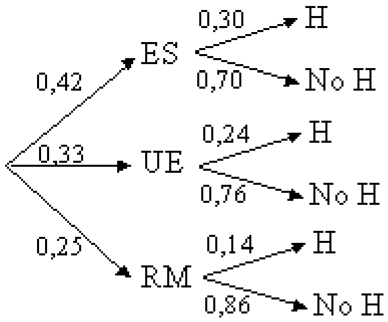
P(H) = P(ES) · P(H/ES) + P(UE) · P(H/UE) + P(RM) · P(H/RM) =

= 0,42 · 0,30 + 0,33 · 0,24 + 0,25 · 0,14 = 0,2402

En consecuencia, la probabilidad de que el crédito concedido no sea hipotecario es:

P(No H) = 1 – P(H) = 1 – 0,2402 = 0,7598

Nota: Puede convenir hacer un diagrama de árbol como el siguiente.



P(no H) = 0,42 · 0,70 + 0,33 · 0,76 +

0,25 · 0,86 = 0,7598

Pregunta 4

Sea X= número de respuestas acertadas en el examen, X es una distribución de probabilidad binomial, B(n, p), con n = 6, p = P(acierto) = 0,25 y q = P(fallo) = 0,75.

probabilidad binomial, B(n, p), con n = 6, p = P(acierto) = 0,25 y q = P(fallo) = 0,75.

Como sabemos, para la B(n, p), la probabilidad de r aciertos en n intentos es:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

En este caso:

P(X ≥ 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =

= $\binom{6}{4} 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^2 + \binom{6}{5} 0{,}25^5 \cdot 0{,}75 + \binom{6}{6} 0{,}25^6$ **=**

= $15 \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^2 + 6 \cdot 0{,}25^5 \cdot 0{,}75 + 0{,}24^6$ **=**

= $0{,}03296 + 0{,}00439 + 0{,}00024 = 0{,}03759$