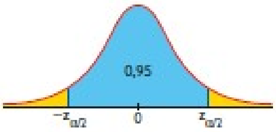
3. Estimación de la media por intervalos de confianza

Piensa y calcula

Sea $z = N(0, 1)$. Utiliza la tabla del anexo final y calcula el valor de $z_{\alpha/2}$ tal que $P(-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) = 0,95$



Observa

Sea μ la media y σ la desviación típica de la población. Para estudiar la media de la población, se eligen **k** muestras distintas de tamaño **n** y se obtienen valores para las medias muestrales $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_k$ y desviaciones típicas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_k$ para cada muestra. La distribución de la variable aleatoria de las medias muestrales que se representa por $\bar{X}$ se generaliza por el teorema central del límite.

Estrategia de resolución de problemas

- Se escribe la variable aleatoria: $\bar{X} = \dots$
- Se escribe el tamaño de la muestra y si se puede aproximar a una normal. Se expresa la fórmula de la normal.
- Se halla la media, la desviación típica y la normal correspondiente.
- Se escriben las preguntas del problema en forma de probabilidad y se resuelven: $P(\bar{X} \le z)$

3.1. Distribución de las medias muestrales

Teorema central del límite

Dada una población que tiene de media μ y de desviación típica σ, **la distribución de las medias muestrales** de tamaño **n,** $\bar{X}$, tiene las siguientes características:

- La media es μ
- La desviación típica es $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Si el tamaño de la muestra **n** es grande ($n \ge 30$), la distribución de la variable $\bar{X}$ se aproxima a una distribución normal, $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

  Si $n < 30$ pero la población sigue una distribución normal, las medias muestrales también se ajustarán a una normal.

4 Ejercicio resuelto

La estatura de los socios de un club tiene de media $\mu = 175$ cm y desviación típica $\sigma = 10$ cm. Si se elige una muestra de 64 socios, ¿cuál es la probabilidad de que la media de la muestra sea menor o igual que 173 cm?

- Variable: $\bar{X} \equiv$ medias muestrales
- $n = 64 \ge 30 \Rightarrow$ se aproxima a una normal: $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- $\mu = 175,\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{10}{\sqrt{64}} = 1,25 \Rightarrow \bar{X} \equiv N(175; 1,25)$
- $P(\bar{X} \le 173) = P\left(z \le \dfrac{173 - 175}{1,25}\right) = P(z \le -1,6) = 1 - P(z \le 1,6) =$
  $= 1 - 0,9452 = 0,0548$

3.2. Intervalo de confianza para la media

El **intervalo de confianza** para la media de la población μ con un nivel de confianza $\mathbf{1 - \alpha}$ es:

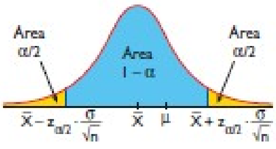
$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es un valor que en una **N(0, 1)** cumple que:

$$P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

El **nivel de confianza** $\mathbf{1 - \alpha}$ es la probabilidad que se tiene de que la media de la población pertenezca al intervalo dado.

El **nivel de significación** $\boldsymbol{\alpha}$ es la probabilidad de que la media de la población no esté en dicho intervalo.



Observa que en una población de media μ desconocida y desviación típica σ conocida, si se toman muestras de tamaño $n \geq 30$ o la población es normal, la variable de las medias muestrales $\overline{X}$ es

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

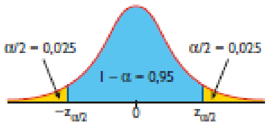
5 Ejercicio resuelto

En una muestra de 100 jóvenes se ha obtenido que el peso medio es de 69 kg. Sabiendo que la desviación típica de la población es 8 kg, halla el intervalo de confianza con un nivel de significación de 0,05, para la media de la población.

- Como $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$
- El intervalo es:

$$\left(69 - 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}}, 69 + 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}}\right) = (67{,}43; 70{,}57)$$

- Se tiene que $\mu \in (67{,}43; 70{,}57)$ con una probabilidad del 95%



3.3. Error y tamaño de la muestra

Error máximo admisible	Tamaño de la muestra
$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$

6 Ejercicio resuelto

Se quieren estimar las ventas diarias que se hacen en una tienda con un nivel de confianza del 90% y cuyo error máximo de la estimación sea de 200 €. Calcula el número mínimo de días que se deben contabilizar las ventas, sabiendo que la desviación típica es de 500 €

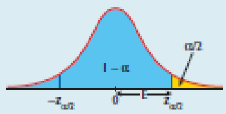
a) $1 - \alpha = 0{,}9 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}65$

b) $n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 \Rightarrow n = \left(1{,}65 \cdot \frac{500}{200}\right)^2 \Rightarrow n = 17{,}02$

Se deben contabilizar las ventas durante 17 días.

Observa

- Cuanto mayor es el tamaño de la muestra, menor es E. Es decir, para aumentar la precisión, debe aumentar el tamaño de la muestra.
- Cuanto mayor es el nivel de confianza $1 - \alpha$, mayor es E.



Aplica la teoría

8. Una empresa de transporte sabe que el peso medio de los paquetes que transporta es de 20 kg, con una desviación típica de 5 kg. Si en uno de sus transportes lleva 50 paquetes, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio sea mayor de 22 kg?

9. El tiempo que permanece cada paciente en la consulta de cierto médico es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con una desviación típica de 4 minutos. Se ha tomado una muestra de 256 pacientes de este médico, y se ha encontrado que su tiempo medio de consulta ha sido de 10 minutos. Calcula el intervalo de confianza, a un nivel del 95%, para el tiempo medio de consulta que se deduce de la muestra.

10. Las ventas mensuales en una tienda de electrodomésticos se distribuyen según una ley normal con desviación típica de 540 €. Se ha realizado un estudio en los últimos nueve meses, y se ha hallado el intervalo de confianza (2 802, 3 508)

a) ¿Cuál ha sido la media de las ventas en esos nueve meses?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

11. Un fabricante de bombillas sabe que la desviación típica de la duración de las bombillas es de 100. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de someter a prueba para tener una confianza del 95% de que el error de la duración media que se calcule sea menor de 10 h.

4. Estimación de la proporción por intervalos de confianza

Piensa y calcula

Se ha realizado una estimación de la proporción de jóvenes que leen el periódico diariamente con un nivel de confianza del 95% y se ha obtenido que dicha proporción está en el intervalo (71, 75). Calcula cuál es el error máximo que se puede cometer con el nivel de confianza del 95% en esta estimación.

4.1. Distribución de las proporciones muestrales

Observa

Se quiere estudiar la proporción o probabilidad **p** de una población que tiene cierta característica; por ejemplo, tener o no tener coche, ser válido o defectuoso, etcétera. Para estudiar la proporción de la población se eligen **k** muestras distintas de tamaño **n** y se obtienen valores para las proporciones muestrales $\mathbf{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k}$

La distribución de las proporciones muestrales de tamaño **n,** que se representa por $\hat{p}$, tiene las siguientes características:

a) La media es **p**

b) La desviación típica es $\sqrt{\frac{pq}{n}}$, $q = 1 - p$

c) Si el tamaño de la muestra **n** es grande ($n \geq 30$), la distribución de la variable $\hat{p}$ se aproxima a una distribución normal, $\mathbf{N}\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$

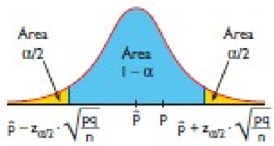
7 Ejercicio resuelto

El 3% de las piezas fabricadas por una máquina es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que, en 50 piezas, el 2% o menos sea defectuoso?

- Variable: $\hat{p}$ = proporciones muestrales
- $n = 50 \geq 30 \Rightarrow$ se puede aproximar a una normal: $N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$
- $p = 0,03 \Rightarrow q = 0,97 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{0,03 \cdot 0,97}{50}} = 0,024$
- $P(\hat{p} \leq 0,02) = P\left(z \leq \frac{0,02 - 0,03}{0,024}\right) = P(z \leq -0,42) = 1 - P(z \leq 0,42) =$

$$= 1 - 0,6628 = 0,3372$$

4.2. Intervalo de confianza para la proporción



Observa

Observa que para estimar la proporción **p,** si se toma una muestra de tamaño $n \geq 30$ o la población es normal, la variable de las proporciones muestrales es

$$N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

El **intervalo de confianza** para la proporción **p,** con un nivel de confianza $\mathbf{1 - \alpha}$, es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

donde:

- $q = 1 - p$
- $z_{\alpha/2}$ es un valor que en una **N(0, 1)** cumple que
  $$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$
- El **nivel de confianza** $\mathbf{1 - \alpha}$ es la probabilidad que se tiene de que la proporción de la población pertenezca al intervalo dado.
- El **nivel de significación** $\boldsymbol{\alpha}$ es la probabilidad de que la proporción de la población no esté en dicho intervalo.

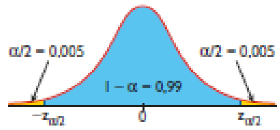
Proporción **p** desconocida

Como la proporción **p** que se quiere estimar no se conoce, se utilizan para realizar los cálculos $\hat{p}$ y $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, es decir:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

8 Ejercicio resuelto

Se ha tomado una muestra de 40 olivos, y se han contabilizado 18 de ellos con repilo (enfermedad producida por un hongo). Halla el intervalo de confianza para la proporción de olivos con repilo en la población, con un nivel de confianza del 99%



- Como $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$
- Se tiene: $\hat{p} = \frac{18}{40} = 0{,}45$; $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}55$

$$\left(0{,}45 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{40}}; 0{,}45 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{40}}\right) = (0{,}25; 0{,}65)$$

- La proporción estará entre el 25% y el 65%, con una probabilidad del 99%

4.3. Error y tamaño de la muestra

Error máximo para la proporción	Tamaño de la muestra
$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, q = 1 - p$	$n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{pq}{E^2}$

9 Ejercicio resuelto

Se sabe por una encuesta piloto que la proporción de usuarios que valora el uso de un modelo de ordenador es 0,45. Calcula el tamaño de la muestra que ha de tomarse para estimar con un nivel de confianza del 95% y que el error máximo de la estimación sea 0,5% la proporción de usuarios que valoran positivamente el modelo de ordenador.

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

b) $n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{pq}{E^2} \Rightarrow n = 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{0{,}005^2} \Rightarrow n = 38\,031{,}84$

Se debe entrevistar a 38 032 personas.

Aplica la teoría

12. En unas elecciones, uno de los candidatos obtuvo el 46% de los votos. Calcula la probabilidad de que en una muestra elegida al azar de 200 votantes saliera un porcentaje a su favor igual o superior al 50%

13. En una muestra aleatoria de 400 personas que han visto un programa de televisión, 100 personas reconocieron que éste les había gustado. Determina el intervalo de confianza, al 95%, para la proporción de personas en la población a las que les gusta el programa.

14. En una muestra de 100 pacientes sometidos a un cierto tratamiento, se obtiene mejoría en 80 pacientes. Si se trabaja con un nivel de confianza del 95%:

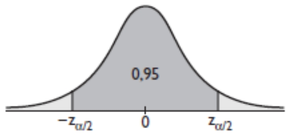
a) ¿cuál es el error máximo admisible?

b) ¿cuál es el mínimo número de pacientes que se debe tomar si con el nivel de confianza dado se desea que el error sea menor de 0,05?

3. Estimación de la media por intervalos de confianza

Piensa y calcula

Sea $z \equiv N(0, 1)$. Utiliza la tabla del anexo final y calcula el valor de $z_{\alpha/2}$ tal que $P(-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) = 0,95$



Solución:

$P(-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) = 0,95$

$2P(z < z_{\alpha/2}) - 1 = 0,95$

$P(z < z_{\alpha/2}) = \dfrac{1 + 0,95}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

Aplica la teoría

8. Una empresa de transporte sabe que el peso medio de los paquetes que transporta es de 20 kg, con una desviación típica de 5 kg. Si en uno de sus transportes lleva 50 paquetes, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio sea mayor de 22 kg?

Solución:

a) Variable: $\overline{X}$ = medias muestrales.

b) $n = 50 \geq 30 \Rightarrow \mu = 20, \sigma = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = 0,71 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{X} \equiv N(20; 0,71)$

c) $P(\overline{X} > 22) = P\left(z > \dfrac{22 - 20}{0,71}\right) = P(z > 2,82) =$

$= 1 - P(z < 2,82) = 0,0024$

9. El tiempo que permanece cada paciente en la consulta de cierto médico es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con una desviación típica de 4 minutos. Se ha tomado una muestra de 256 pacientes de este médico, y se ha encontrado que su tiempo medio de consulta ha sido de 10 minutos. Calcula el intervalo de confianza, a un nivel del 95%, para el tiempo medio de consulta que se deduce de la muestra.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

b) El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(10 - 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{256}}, 10 + 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{256}}\right) =$$

$= (9,51; 10,49)$

Se tiene que $\mu \in (9,51; 10,49)$ con una probabilidad del 95%

10. Las ventas mensuales en una tienda de electrodomésticos se distribuyen según una ley normal con desviación típica de 540 €. Se ha realizado un estudio en los últimos nueve meses, y se ha hallado el intervalo de confianza (2 802, 3 508)

a) ¿Cuál ha sido la media de las ventas en esos nueve meses?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

Solución:

a) $\overline{X} = \dfrac{2\,802 + 3\,508}{2} = 3\,155$

b) $\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\,802 \Leftrightarrow 3\,155 - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{540}{\sqrt{9}} =$

$= 2\,802 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96 \Rightarrow P(-1,96 < z < 1,96) =$

$= 0,95 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95$

11. Un fabricante de bombillas sabe que la desviación típica de la duración de las bombillas es de 100. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de someter a prueba para tener una confianza del 95% de que el error de la duración media que se calcule sea menor de 10 h

Solución:

Como $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{E}\right)^2$

$n = \left(1,96 \cdot \dfrac{100}{10}\right)^2 = 384,16$

Se debe tomar una muestra de 385 bombillas.

4. Estimación de la proporción por intervalos de confianza

Piensa y calcula

Se ha realizado una estimación de la proporción de jóvenes que leen el periódico diariamente con un nivel de confianza del 95% y se ha obtenido que dicha proporción está en el intervalo (71, 75). Calcula cuál es el error máximo que se puede cometer con el nivel de confianza del 95% en esta estimación.

Solución:

El error máximo es:

$\frac{75 - 71}{2} = 2$ jóvenes

Aplica la teoría

12. En unas elecciones, uno de los candidatos obtuvo el 46% de los votos. Calcula la probabilidad de que en una muestra elegida al azar de 200 votantes saliera un porcentaje a su favor igual o superior al 50%

Solución:

Variable: $\hat{p}$ = proporciones muestrales.

$$n = 200 \geq 30 \Rightarrow p = 0{,}46 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{0{,}46 \cdot 0{,}54}{200}} = 0{,}035$$

$$P(\hat{p} \geq 0{,}5) = P\left(z \geq \frac{0{,}5 - 0{,}46}{0{,}035}\right) = 1 - P(z \leq 1{,}14) =$$

$$= 0{,}1271$$

13. En una muestra aleatoria de 400 personas que han visto un programa de televisión, 100 personas reconocieron que éste les había gustado. Determina el intervalo de confianza, al 95%, para la proporción de personas en la población a las que les gusta el programa.

Solución:

a) Como $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Se tiene: $\hat{p} = \frac{100}{400} = 0{,}25$; y $\hat{q} = 0{,}75$

b) El intervalo es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}25 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{400}}; 0{,}25 + \right.$$

$$\left. + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{400}}\right) = (0{,}21; 0{,}29)$$

La proporción estará entre el 21% y el 29% con una probabilidad del 95%

14. En una muestra de 100 pacientes sometidos a un cierto tratamiento, se obtiene mejoría en 80 pacientes. Si se trabaja con un nivel de confianza del 95%:

a) ¿cuál es el error máximo admisible?

b) ¿cuál es el mínimo número de pacientes que se debe tomar si con el nivel de confianza dado se desea que el error sea menor de 0,05?

Solución:

a) Como $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$E = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{100}} = 0{,}08$$

b) $n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{pq}{E^2}$

$$n = 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{0{,}05^2} = 245{,}86$$

Se debe tomar una muestra de 246 pacientes.

Solución:

a) Es aconsejable elegir la muestra sin reemplazamiento, para evitar que la opinión de una persona se tenga en cuenta más de una vez.

b1) Se deben considerar los estratos formados por niños, adultos y ancianos.

b2) 10 000 : 100 = 100

De cada 100, se elige uno.

Estratos	Niños	Adultos	Ancianos	Total
Individuos	2 500	7 000	500	10 000
Muestra	25	70	5	100

3. Estimación de la media por intervalos de confianza

21. Una variable aleatoria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se extraen muestras aleatorias simples de tamaño **n**

a) ¿Qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral?

b) Si se toman muestras de tamaño 4 de una variable aleatoria **x** con distribución N(165, 12), calcula $P(\overline{X} > 173{,}7)$

Solución:

a) $\overline{X} \equiv N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

b) Variable: $\overline{X}$ = medias muestrales.

n = 4 < 30 pero la distribución es normal; luego:

$$\mu = 165, \sigma = \frac{12}{\sqrt{4}} = 6 \Rightarrow \overline{X} \equiv N(165; 6)$$

$$P(\overline{X} > 173{,}7) = P\left(z > \frac{173{,}7 - 165}{6}\right) = P(z > 1{,}45) =$$

$$= 1 - P(z < 1{,}45) = 0{,}0735$$

22. Se sabe que el peso de los recién nacidos en una determinada población sigue una distribución normal de 3 600 g de media y 280 g de desviación típica. Se toma una muestra al azar de 196 de estos recién nacidos, y se calcula la media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media esté entre 3 580 y 3 620 g?

Solución:

a) Variable: $\overline{X}$ = medias muestrales.

b) $n = 196 \geq 30 \Rightarrow \mu = 3\,600, \sigma = \dfrac{280}{\sqrt{196}} = 20 \Rightarrow$

$\overline{X} \equiv N(3\,600, 20)$

c) $P(3\,580 < \overline{X} < 3\,620) =$

$$= P\left(\frac{3\,580 - 3\,600}{20} < z < \frac{3\,620 - 3\,600}{20}\right) =$$

$$= P(-1 < z < 1) = 2P(z < 1) - 1 = 0{,}6826$$

23. Se probaron 10 automóviles, escogidos aleatoriamente de una misma marca y modelo, por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares. Se obtuvo que el consumo medio de gasolina en litros, por cada 100 km, fue de 5. Estudios previos indican que el consumo de gasolina tiene una distribución normal de 2 litros de desviación típica. Determina un intervalo de confianza al 95% para la media del consumo de gasolina de estos automóviles.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

b) El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(5 - 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}; 5 + 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = (3{,}76; 6{,}24)$$

Se tiene que el consumo medio cada 100 km está en el intervalo (3,76; 6,24) con una probabilidad del 95%

24. La duración de las llamadas de teléfono en una oficina comercial sigue una distribución normal con desviación típica de 10 segundos. Se hace una encuesta entre 50 llamadas, y la media de duración obtenida en esa muestra es de 35 segundos. Calcula un intervalo de confianza al 99% para la duración media de las llamadas.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

b) El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(35 - 2{,}58 \cdot \frac{10}{\sqrt{50}}; 35 + 2{,}58 \cdot \frac{10}{\sqrt{50}}\right) = (31{,}35; 38{,}65)$$

Se tiene que la duración media de las llamadas está en el intervalo (31,35; 38,65) con una probabilidad del 99%

25. Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica de 0,05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0,01 segundos, con un nivel de confianza del 99%, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempo de reacción?

Solución:

$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(2{,}58 \cdot \frac{0{,}05}{0{,}01}\right)^2 = 166{,}41$$

Se debe tomar una muestra de 167 individuos.

26. Una variable aleatoria **x** tiene distribución normal, y su desviación típica es igual a 3

a) Si se consideran muestras de tamaño 16, ¿qué distribución sigue la variable aleatoria media muestral?

b) Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de una unidad de la media de la población, con probabilidad de 0,99, ¿cuántos elementos se deberían tomar como mínimo en la muestra?

Solución:

a) Si se llama μ a la media de la población, entonces la media muestral sigue una distribución:

$$\overline{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \overline{X} \equiv N\left(\mu, \frac{3}{\sqrt{16}}\right) \Rightarrow N(\mu, 0{,}75)$$

b) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(2{,}58 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 = 59{,}91$$

Se debe tomar una muestra de 60 individuos.

4. Estimación de la proporción por intervalos de confianza

27. En un centro escolar, el 40% de los alumnos tienen dos o más hermanos. Si se selecciona una muestra de 36 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que, de los alumnos de la muestra, el 50% o menos tengan dos o más hermanos?

Solución:

Variable: $\hat{p}$ = proporciones muestrales

$$n = 36 \geq 30 \Rightarrow p = 0{,}4 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{36}} = 0{,}08$$

$$P(\hat{p} \leq 0{,}5) = P\left(z \leq \frac{0{,}5 - 0{,}4}{0{,}08}\right) = P(z \leq 1{,}25) = 0{,}8944$$

28. Se ha realizado una encuesta a 325 ciudadanos y se ha contabilizado que 120 iban al teatro regularmente.

a) Halla, con un nivel de confianza del 94%, un intervalo para estimar la proporción de ciudadanos que van al teatro regularmente.

b) Calcula el número mínimo de ciudadanos que deben entrevistarse para que el error sea del 0,01

Solución:

a) Nivel de confianza $= 1 - \alpha = 0{,}94 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}89$

$p = 120/325 = 0{,}369 \Rightarrow q = 0{,}631$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}369 \cdot 0{,}631}{325}} = 0{,}027$$

$(0{,}369 - 1{,}89 \cdot 0{,}027; 0{,}369 + 1{,}89 \cdot 0{,}027) =$

$= (0{,}32; 0{,}42)$

La proporción de ciudadanos está entre el 32% y el 42% con una probabilidad del 94%

b) $n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \dfrac{pq}{E^2}$

$$n = (1{,}89)^2 \cdot \frac{0{,}369 \cdot 0{,}631}{0{,}01^2} = 8\,317{,}24$$

Se tomarán 8 318 personas.

29. En una muestra aleatoria de 400 personas de una población, hay 80 que tienen teléfono móvil. Calcula el intervalo de confianza aproximado para la proporción poblacional, con un nivel de confianza del 95%

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Se tiene: $\hat{p} = 0{,}2$; y $\hat{q} = 0{,}8$

b) El intervalo es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}2 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{400}}; 0{,}2 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{400}}\right) =$$

$= (0{,}16; 0{,}24)$

La proporción estará entre el 16% y el 24% con una probabilidad del 95%

30. Cuando se ha preguntado a 100 personas de cierta ciudad, elegidas al azar, si leen el periódico al menos una vez a la semana, solo 40 han contestado que sí. Encuentra un intervalo de confianza, con nivel de confianza del 99%, para la proporción de personas de esa ciudad que leen el periódico al menos una vez a la semana.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

Se tiene: $\hat{p} = 0{,}4$; y $\hat{q} = 0{,}6$

b) El intervalo es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}4 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}}; 0{,}8 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}}\right) =$$

$= (0{,}27; 0{,}53)$

La proporción estará entre el 27% y el 53% con una probabilidad del 99%

31. El 70% de las personas que tienen teléfono móvil usan algún servicio de telefonía a través de Internet. Si se toma una muestra de 150 personas, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 90 personas que usen algún servicio de telefonía móvil a través de Internet?

Solución:

- Variable: $\hat{p}$ = proporciones muestrales
- $n = 150 \geq 30 \Rightarrow$ se puede aproximar a una normal:

$$N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

- $p = 0{,}7 \Rightarrow q = 0{,}3 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{150}} = 0{,}04$
- $P(\hat{p} \geq 0{,}6) = P\left(z \leq \dfrac{0{,}6 - 0{,}7}{0{,}04}\right) = P(z \geq -2{,}5) =$

$= P(z \leq 2{,}5) = 0{,}9938$

32. De una muestra de 60 clientes de supermercados, 24 fueron capaces de decir el precio del producto que habían comprado.

a) Determina el intervalo de confianza, al 95% para la proporción de clientes de la población.

b) Calcula el número mínimo de clientes para que el error sea menor de un 5%

Solución:

a) Como $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Se tiene: $\hat{p} = 0{,}4$; y $\hat{q} = 0{,}6$

El intervalo es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}4 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{60}}; 0{,}4 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{60}}\right) =$$

$= (0{,}28; 0{,}52)$

La proporción estará entre el 28% y el 52% con una probabilidad del 95%