	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 3**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los ejercicios se puntuará sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro m. **(1 punto)**

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso $m = 2$. **(1 punto)**

E2.- a) Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto $A = (1, \quad 2, \quad 1)$. **(1 punto)**

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $\boldsymbol{B} = (2, \quad 1, \quad 2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. **(1 punto)**

E3.- Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, para $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcule el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-2,2]$. **(1 punto)**

E4.- a) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\,\mathrm{sen}(x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x) = 4x$ y de $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0,2]$, probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$. **(1 punto)**

E5.- Las notas de Matemáticas II de 500 alumnos presentados al examen de EBAU tienen una distribución normal con media 6,5 y desviación típica 2.

a) Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos. **(1 punto)**

b) ¿Cuántos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos? **(1 punto)**

OPCIÓN B

E1.- **a)** Encontrar los valores de k para que la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible. **(1 punto)**

b) Encontrar la inversa de A para $k = 2$. **(1 punto)**

E2.- Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi \equiv x + y + kz = 0$.

Encontrar m y k para que:

a) La recta r sea perpendicular al plano $\boldsymbol{\pi}$. **(1 punto)**

b) La recta r esté contenida en el plano $\boldsymbol{\pi}$. **(1 punto)**

E3.- Sea el polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ del cual sabemos que $f(0) = 1, f(1) = 0$ y que tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 1$. Calcular a, b, c y d. **(2 puntos)**

E4.- **a)** Sea $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**

b) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{3\cos(x) - 3}$. **(1punto)**

E5.- En una competición de tiro olímpico hay 10 rifles, 4 con visor telescópico y 6 sin él. La probabilidad de que un tirador haga blanco con un rifle con visor telescópico es 0,95 y sin él es de 0,65.

a) Halla la probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar. **(1 punto)**

b) Si el tirador hace blanco. ¿Es más probable que haya disparado con un rifle con visor telescópico o sin él? **(1 punto)**

$\boxed{\text{MAT II - EBAU 2019}}$

$\boxed{A}$ Dado el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

discutir el sistema según los valores del parámetro m y resolver para el caso $m=2$.

a) La matriz ampliada del sist. es $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$, con A la parte izquierda.

Estudiamos los rangos:

$|A| = 2 + 4m - 2m - 4 = 2m - 2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$

Por lo tanto:

Si $m \neq 1 \Rightarrow R(A) = R(\bar{A}) = 3 = n^{\circ}$ incógnitas y por el Teorema de Rouché Fröbenius el sistema es compatible determinado, solución única.

Si $m = 1$ $\quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$, con A la parte izquierda.

$|A| = 0 \Rightarrow R(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow R(A) = 2$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 12 + 8 - 6 - 12 - 8 = 0 \Rightarrow R(\bar{A}) = 2$

Luego $R(A) = R(\bar{A}) = 2 < n^{\circ}$ incógnitas $\Rightarrow$ Por el Teorema de Rouché Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, infinitas soluciones.

b) Si $m=2$ el sistema equivalente es $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x+y=3 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x+y=4-2\lambda \\ 2x+y=3 \end{cases}$

$$-x = 1-2\lambda \qquad \boxed{x=-1+2\lambda}$$

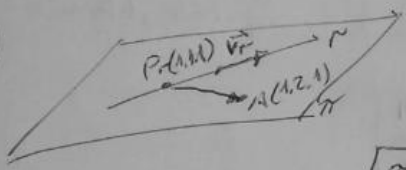
$$y = 3-2(-1+2\lambda) = 3+2-4\lambda \Rightarrow \boxed{y=5-4\lambda}$$

Por lo tanto las infinitas soluciones son: $\boxed{\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=5-4\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}}$

2) a) ¿$\pi \supset r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{2}$ y $A(1,2,1)\in\pi$?

b) ¿$r \,/\, B(2,1,2)\in r$ y $r \perp s_1 \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{2}$; $\perp s_2 \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$?

a)



$$\pi \equiv \begin{cases} A(1,2,1) \\ \vec{v_r} = (2,3,2) \\ \overrightarrow{P_rA} = (0,1,0) \end{cases} \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-2 & 3 & 1 \\ z-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv 2z-2x=0}$$

b)

$$r \equiv \begin{cases} B(2,1,2) \\ \vec{v_r} = \vec{v_{s_1}} \times \vec{v_{s_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k} = (-2,-6,8) \parallel (1,3,-4) \end{cases}$$

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 2-4\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}}$$

③ Dada $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, para $x \in \mathbb{R}$.

a) ¿Máx y mín y monotonía? b) Extremos absolutos en $[-2,2]$.

a) Extremos relativos y Monotonía:

Hallamos los puntos críticos $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Estudiamos el signo de la derivada:

$f' > 0 \nearrow$ | -2 | $f'(0) = -12 < 0 \searrow$ | 1 | $f' > 0 \nearrow$

-2: Máximo relativo $(-2, f(-2))$ $\boxed{(-2, 20)}$

1: mínimo relativo $(1, f(1))$ $\boxed{(1, -7)}$

Crecimiento: $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Decrecimiento: $x \in (-2, 1)$

b) Estudiamos el valor de f en los extremos:

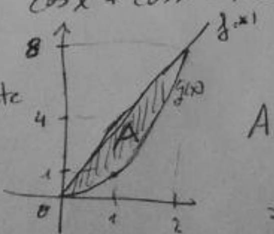
$f(-2) = 20$ y $f(2) = 4$

Por lo tanto el mínimo absoluto es -7 y el máximo absoluto 20.

④ a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x \operatorname{sen} x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\text{L'Hôpital}}{=}}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \boxed{\frac{-1}{2}}$

b) gráficamente se ve que $f(x) \geq g(x)$



$A = \displaystyle\int_0^2 (4x - x^3)\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 =$

$= 8 - 4 = \boxed{4u^2}$

⑤ 500 alumnos   Notas = $X \sim N(6{,}5\,;\,2)$

a) $P(X>8) = P\left(Z > \frac{8-6{,}5}{2}\right) = P(Z > 0{,}75) = 1 - P(Z \leq 0{,}75) =$

$= 1 - 0{,}77337 = \boxed{0{,}22663} \rightarrow 22{,}663\,\%$

b) Hallemos el % de alumnos con notas <5:

$P(X<5) = P\left(Z < \frac{5-6{,}5}{2}\right) = P(Z < -0{,}75) =$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}75) = 1 - 0{,}77337 = 0{,}22663$

El 22,663 % sacaron menos de un cinco ⇒ $\boxed{\text{113 alumnos sacaron menos de un 5}}$

MAT II - EBAU - 2019

B

(1) a) Hallar k para que $A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible.

b) Hallar A^{-1} para $k=2$.

a) $|A| = (k-1)(k-2)+2+2(k-2) = k^2-3k+\cancel{2}+\cancel{2}+2k\cancel{-4} = k^2-k$

$|A|=0 \iff k^2-k=0 \Rightarrow k \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

Por lo tanto para $k \neq 0$ y $k \neq 1$ $\exists\, A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t)$.

b) Si $k=2 \Rightarrow |A|=2$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

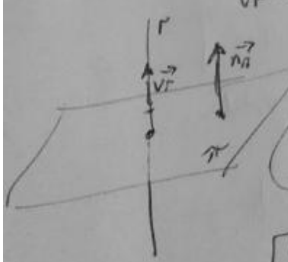
$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ +2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Luego $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$

(2) Sean $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y $\pi \equiv x+y+kz=0$

a) ¿m y k / $r \perp \pi$?

$\vec{v_r}=(m,2,4)$ y $\vec{n_\pi}=(1,1,k)$



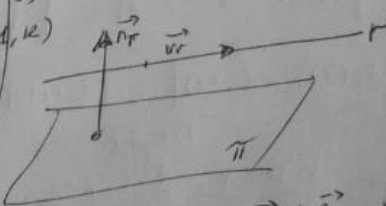
$r \perp \pi \iff \vec{v_r} \parallel \vec{n_\pi}$ proporcionales

Entonces: $\frac{m}{1} = \frac{2}{1} = \frac{4}{k}$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

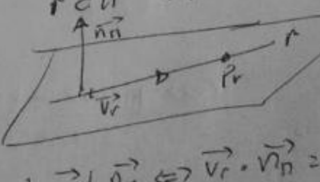
$\boxed{m=2}$ y $\boxed{k=2}$

b) ¿m y k / $r \subset \pi$?



PARALELOS.

$r \subset \pi \iff \vec{v_r} \perp \vec{n_\pi}$ y $P_r \in \pi$, $P_r = (1,1,1)$



$\begin{cases} \vec{v_r} \perp \vec{n_\pi} \iff \vec{v_r} \cdot \vec{n_\pi} = 0 \Rightarrow (m,2,4)\cdot(1,1,k)=0 \\ P_r(1,1,1) \in \pi \Rightarrow 1+1+k=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} m+2+4k=0 \rightarrow \boxed{m=6} \\ 2+k=0 \rightarrow \boxed{k=-2} \end{cases}$

(3) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ y tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 1$. Calcular a, b, c y d.

Hallamos $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y obtenemos un sist. con las condiciones;

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{d = 1} \\ a + b + c + 1 = 0 \\ \boxed{c = 0} \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \rightarrow a = -b - 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \quad \boxed{a = 2}$$

$$\Rightarrow -b = 3 \Rightarrow \boxed{b = -3}$$

Por lo tanto $\boxed{f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1}$

(4) a) Sea $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

b) Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,\text{sen}(x)}{3\cos(x) - 3}$

a) Vemos si la gráfica corta al eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$

$y = 0 \Rightarrow \dfrac{2x+3}{x^2+3x+1} = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

la gráfica corta al eje OX en $x = \frac{-3}{2}$ y por lo tanto el área pedida es: $A = \left| \int_0^2 \dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}\, dx \right| = \left| \left[\ln(x^2+3x+1) \right]_0^2 \right|$

$= \left| \ln(11) - \ln(1) \right| = \left| \ln(11) \right| = \ln 11\ u^2 \approx \boxed{2{,}4\ u^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \,\text{sen}\, x}{3\cos x - 3} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x + x\cos x}{-3\,\text{sen}\, x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\text{L'Hôpital}}{=}}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x + \cos x - x\,\text{sen}\, x}{-3\cos x} = \boxed{\dfrac{-2}{3}}$

(5) Tenemos 10 rifles, 4 con visor y 6 sin visor.

Definimos los siguientes sucesos:

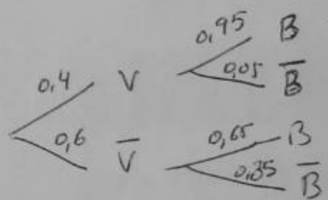
V = "elegir rifle con visor" $\bar{V}$ = "elegir rifle sin visor".

B = "Hacer blanco" $\bar{B}$ = "No hacer blanco"

Sabemos que $P(V) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4 \Rightarrow P(\bar{V}) = \frac{3}{5} = 0{,}6$

y que $P(B/V) = 0{,}95$ y $P(B/\bar{V}) = 0{,}65$.

Hacemos el diagrama de árbol:



$\rightarrow P(V \cap B) = 0{,}4 \cdot 0{,}95 = 0{,}38$

(Regla del Producto)

$\rightarrow P(\bar{V} \cap B) = 0{,}6 \cdot 0{,}65 = 0{,}39$

Por lo tanto, eligiendo un rifle al azar la probabilidad de hacer blanco es: $P(B) = P(V \cap B) + P(\bar{V} \cap B) = \boxed{0{,}77}$ por el teorema de las probabilidades totales.

Sabiendo que ha hecho blanco calculamos las probabilidades de elegir un rifle con visor o sin visor, es decir,

$$P(V/B) = \frac{0{,}38}{0{,}77} = 0{,}4935$$ (Por el Teorema de Bayes)

$$P(\bar{V}/B) = \frac{0{,}39}{0{,}77} = 0{,}5065$$

Luego es más probable que haya disparado con un rifle sin visor.