+EJERCICIOS DE PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD.

Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es del 0,6. La probabilidad de que pase la segunda es del 0,8 y la de que pase ambas es del 0,5. Se pide:

a) La probabilidad de que pase, al menos, una prueba.

b) La probabilidad de que no pase ninguna prueba.

c) ¿Son las pruebas independientes?

d) La probabilidad de que pase la segunda prueba en el caso de no haber superado la primera.

Sean A y B, respectivamente, la primera y la segunda de las pruebas. Tenemos:

$$P(\mathrm{A}) = 0{,}6,\ P(\mathrm{B}) = 0{,}8 \text{ y } P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}5$$

a) $P(\text{ pase al menos una }) = P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}9$

b) $P(\text{ no pase ninguna }) = 1 - P(\text{ no pase ninguna }) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

c) No son independientes, ya que $P(A \cap B) = 0{,}5$ *y* $P(A) \cdot P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$ son diferentes.

d) Queda:

$$P(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{A}}) = \frac{P(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}})}{P(\overline{\mathrm{A}})} = \frac{P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\overline{\mathrm{A}})} =$$

$$= \frac{0{,}8 - 0{,}5}{1 - 0{,}6} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$$

En un hospital, la probabilidad de que un enfermo tenga fiebre es 0,76 y de que tenga tensión alta es 0,58. Además, se sabe que la probabilidad de que tenga fiebre o tensión alta es 0,62. Halla la probabilidad de que un enfermo de ese hospital:

a) Tenga fiebre y tensión alta.

b) No tenga ni fiebre ni tensión alta.

Queda:

P(Fiebre y Tensión alta) = 0,76 + 0,58 – 0,62 = 0,72

$$P\left(\overline{F} \cap \overline{T}\right) = P\left(\overline{F \cup T}\right) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$$

Se consideran dos sucesos, *A* y *B*, asociados a un experimento aleatorio, con $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}6$; $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}7$. ¿Son independientes *A* y *B*? Calcula $P(A \cup B)$.

Queda:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 0{,}7 \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}3$$

Como $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$ no son independientes los sucesos A y B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}6 - 0{,}7 = 0{,}1$$

Dados dos sucesos aleatorios A y B, se sabe que:

$$P(\overline{B}) = \frac{3}{4} \qquad P(A) = P(A/B) = \frac{1}{3}$$

a) Razona si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcula $P(A \cup B)$.

c) Determina $P(A/\overline{B})$.

Queda:

a) A y B son independientes puesto que P(A) = P(A/B), es decir B no influye en la probabilidad de A.

b) Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Si $P(\overline{B})=\frac{3}{4}$ entonces $P(B)=\frac{1}{4}$, por ser A y B independientes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{12} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Se sabe que dado A, la probabilidad de que ocurra B es 0,3; es decir, $P(B/A) = 0,3$. ¿Cuánto vale la probabilidad de que dado A no ocurra B: $P(\overline{B}/A)$?

. Como $P(B/A) + P(\overline{B}/A) = 1$ y $P(B/A)=0,3$; entonces $P(\overline{B}/A) = 0,7$.

Dos sucesos A y B se sabe que son independientes, que la probabilidad de que ocurra alguno de ellos es 5/6 y que la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es 1/3. Halla las probabilidades de A y de B.

Como A y B son independientes entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3}$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ obtenemos: $P(A) + P(B) = \frac{7}{6}$.

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} P(A) + P(B) = \frac{7}{6} \\ P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \end{cases}$

Las soluciones son:

- Si $P(B) = \frac{2}{3}$ $P(A) = \frac{1}{2}$.
- Si $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(A) = \frac{2}{3}$.

1. Sean los sucesos A y B tales que P (A) = $\frac{1}{5}$, P (B) = $\frac{2}{3}$ y $P\left(A \cup B\right) = \frac{3}{5}$. Halla:

a) $P\left(A / B\right)$ **b)** $P\left(\overline{A} / B\right)$ **c)** $P\left(B / \overline{A}\right)$

Las probabilidades pedidas son:

a) $P\left(A / B\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \dfrac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{3}{5}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{5}$

b) $P\left(\overline{A} / B\right) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{4}{15}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{5}$

c) $P\left(B / \overline{A}\right) = \dfrac{P\left(B \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{4}{15}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{2}$

2. Sean X e Y dos sucesos tales que P(X) = $\frac{4}{9}$, P (Y / X) = $\frac{1}{2}$ y P(X $\cup$ Y) = $\frac{13}{18}$.

a) Halla P (X ∩ Y).

b) Halla P (Y).

c) ¿Son dependientes o independientes los sucesos X e Y?

Las probabilidades son:

a) $P\left(Y / X\right) = \dfrac{P\left(Y \cap X\right)}{P\left(X\right)} \quad \Rightarrow \quad P\left(Y \cap X\right) = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9}$

b) P (Y) = P (X $\cup$ Y) + P (X ∩ Y) – P(X) = $\frac{1}{2}$

c) Como P (X ∩ Y) = P (X) · P (Y), los sucesos X e Y son independientes.

2. Los dos sucesos de un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad, 0,5. La probabilidad de que ocurra uno de ellos sabiendo que ha ocurrido el otro es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos?

2. Sean A y B los sucesos que verifican P (A) = P (B) = 0,5 y P(A/B) = 0,3. Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$$

La probabilidad pedida es:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [0{,}5 + 0{,}5 - 0{,}15] = 0{,}15$$

6. Calcula $P(\overline{A}/B)$**, sabiendo que** $P(A) = \frac{1}{3}$**,** $P(B) = \frac{1}{4}$ **y** $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$

Utilizando las propiedades de la probabilidad y la definición de probabilidad condicionada obtenemos:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

El 60% de los clientes de una frutería compran naranjas y el 30% no compra ni naranjas ni manzanas. ¿Qué porcentaje de clientes compran manzanas pero no naranjas?

M = comprar manzanas

N = comprar naranjas

$$P(N) = 0{,}6$$

$$\left.\begin{array}{l} P(\overline{N} \cap \overline{M}) = 0{,}3 \\ P(\overline{(N \cup M)}) = 1 - P(N \cup M) \end{array}\right\} \boxed{P(N \cup M)} = 1 - 0{,}3 = \boxed{0{,}7}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(N \cup M) = P(N) + P(M) - P(N \cap M) \\ = P(M \cap \overline{N}) = P(M) - P(M \cap N) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

P(pedida)

$$P(M \cap \overline{N}) = P(N \cup M) - P(N) = 0{,}7 - 0{,}6 = 0{,}1.$$

El 10% compra manzanas y no compra naranjas.