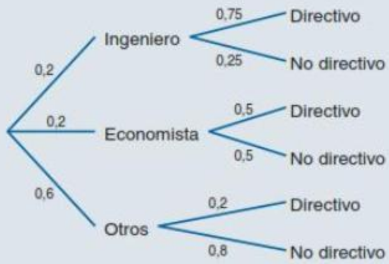
TEOREMA DE BAYES

El 20 % de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20 % son economistas. El 75 % de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50 % de los economistas también, mientras que de los no ingenieros y no economistas solamente el 20 % ocupan un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?

Observando las probabilidades que aparecen en el diagrama de árbol, obtenemos:

$$P(\text{ingeniero}/\text{directivo}) = \frac{P(\text{ingeniero y directivo})}{P(\text{directivo})} =$$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,75}{0,2 \cdot 0,75 + 0,2 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,2} = \frac{0,15}{0,37} = 0,4054$$



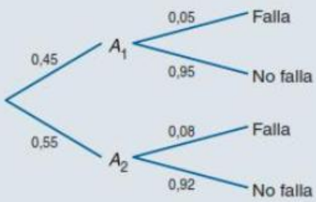
En un cierto edificio se usan dos ascensores; el primero lo usa el 45 % de los inquilinos, y el resto usa el segundo. El porcentaje de fallos del primero es del 5 %, mientras que el del segundo es del 8 %. Si un cierto día un inquilino queda «atrapado» en un ascensor, halla la probabilidad de que haya sido en el primero.

Sean los sucesos A_1 = {Usar el ascensor primero}, A_2 = {Usar el ascensor segundo} y F = {Falla el ascensor}. Debemos calcular la probabilidad de que se haya usado el ascensor primero, sabiendo que se ha producido un fallo, es decir, hay que calcular $P(A_1/F)$.

Observando el diagrama de árbol adjunto, obtenemos:

$$P(A_1/F) = \frac{P(A_1 \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A_1) \cdot P(A_1/F)}{P(A_1) \cdot P(A_1/F) + P(A_2) \cdot P(A_2/F)} =$$

$$= \frac{0,45 \cdot 0,05}{0,45 \cdot 0,05 + 0,55 \cdot 0,08} = \frac{0,0225}{0,0225 + 0,0440} = \frac{0,0225}{0,0665} = 0,3383$$



Se toman dos barajas españolas de 40 cartas. Se extrae al azar una carta de la primera baraja y se introduce en la segunda baraja. Se mezclan las cartas de esta segunda baraja y se extrae una carta, que resulta ser el 2 de oros. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta extraída fuese una espada?

En el diagrama de árbol adjunto se ponen de manifiesto las principales opciones que tiene cada una de las extracciones. Hay que tener en cuenta que los sucesos relevantes en la primera extracción son «espadas» y «2 de oros», y el suceso relevante en la segunda extracción es «2 de oros».

Teniendo en cuenta la probabilidad de cada una de las opciones, tenemos que la probabilidad pedida es:

$$P(\text{espadas}/2 \text{ de oros}) = \frac{P(\text{espadas y } 2 \text{ de oros})}{P(2 \text{ de oros})} =$$

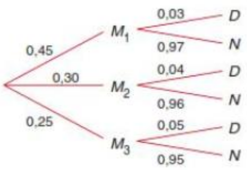
$$= \frac{\frac{10}{40} \cdot \frac{1}{41}}{\frac{10}{40} \cdot \frac{1}{41} + \frac{1}{40} \cdot \frac{2}{41} + \frac{29}{40} \cdot \frac{1}{41}} = \frac{10}{10 + 2 + 29} = \frac{10}{41} = 0,2439$$

9. **Tres máquinas, M_1, M_2 y M_3, producen el 45 %, 30 % y 25 %, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3 %, 4 % y 5 %.**

a) Seleccionamos una pieza al azar. Calcula la probabilidad de que sea defectuosa.

b) Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa. Calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina M_2.

c) ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?



Sean los sucesos D = {La pieza es defectuosa} y N = {La pieza no es defectuosa}. La información del problema puede expresarse en el diagrama de árbol adjunto.

a) Para calcular la probabilidad de que la pieza elegida sea defectuosa, $P(D)$, por la propiedad de la probabilidad total:

$$P(D) = P(M_1) \cdot P(D/M_1) + P(M_2) \cdot P(D/M_2) + P(M_3) \cdot P(D/M_3) =$$
$$= 0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}30 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}038$$

b) Debemos calcular $P(M_2/D)$. Por el teorema de Bayes:

$$P(M_2/D) = \frac{P(M_2) \cdot P(D/M_2)}{P(M_1) \cdot P(D/M_1) + P(M_2) \cdot P(D/M_2) + P(M_3) \cdot P(D/M_3)} =$$

$$= \frac{0{,}30 \cdot 0{,}04}{0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}30 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}05} = \frac{120}{380} = 0{,}316$$

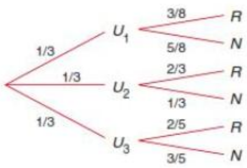
c) Calculamos $P(M_1/D)$ y $P(M_3/D)$, comparándolas con el valor de $P(M_2/D)$ ya calculado. Aplicando el teorema de Bayes, obtenemos lo siguiente:

$$P(M_1/D) = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}03}{0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}30 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}05} = \frac{135}{380} = 0{,}355$$

$$P(M_3/D) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}30 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}05} = \frac{125}{380} = 0{,}329$$

La máquina con mayor probabilidad de haber producido la pieza defectuosa es M_1.

10. **Tenemos tres urnas distintas: U_1 con tres bolas rojas y cinco negras, U_2 con dos bolas rojas y una negra, y U_3 con dos bolas rojas y tres negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la urna U_1?**



Sean los sucesos R = {Sacar bola roja} y N = {Sacar bola negra}. En el diagrama de árbol adjunto pueden verse las distintas probabilidades de ocurrencia de los sucesos R o N para cada una de las tres urnas.

La probabilidad pedida es $P(U_1/R)$. Utilizando el teorema de Bayes, tenemos:

$$P(U_1/R) = \frac{P(U_1) \cdot P(R/U_1)}{P(U_1) \cdot P(R/U_1) + P(U_2) \cdot P(R/U_2) + P(U_3) \cdot P(R/U_3)} =$$

$$= \frac{(1/3) \cdot (3/8)}{(1/3) \cdot (3/8) + (1/3) \cdot (2/3) + (1/3) \cdot (2/5)} = \frac{45}{173} = 0{,}260$$