Probabilidad

La **probabilidad** mide la frecuencia con la que se obtiene un resultado (o conjunto de resultados) al llevar a cabo un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables.
Ejemplo: La frecuencia con la que sale 6 al lanzar un dado varias veces.

Primeras Nociones

- **Experiencia aleatoria**: aquella cuyo resultado depende del azar.
  Ejemplo: Lanzar un dado.
- **Suceso aleatorio**: acontecimiento que ocurrirá o no dependiendo del azar.
  Ejemplo: Que al lanzar un dado salga 6.
- **Espacio muestral**: conjunto de todos los posibles resultado de una experiencia aleatoria.
  Ejemplo: En un dado $E=\{1,2,3,4,5,6\}$.
- **Sucesos**: se llama suceso a cualquier subconjunto de *E*.
  Ejemplos: En un dado $\{1,2\}$, $\{2,4,6\}$, $\{3\}$.
  - **Sucesos individuales o elementales:** Elementos de *E*.
    Ejemplo: En un dado $\{1\}$, $\{2\}$, $\{5\}$.
  - **Suceso imposible ∅:** Los que no se pueden dar
    Ejemplo: En un dado $\{7\}$.
  - **Suceso seguro *E*:** el propio *E*. *Ejemplo: En un dado* $E=\{1,2,3,4,5,6\}$.
- **Frecuencia Absoluta de un Suceso *S***: se llama frecuencia absoluta de un suceso *S*, $f(S)$ al número de veces que ocurre.
  Ejemplo: Si lanzamos un dado 7 veces y 3 de ellas nos sale par, la frecuencia del suceso "par" es 3.
- **Frecuencia Relativa de un Suceso *S***: se llama frecuencia relativa de un suceso *S* a la proporción de veces que ocurre *S*.
  $$f_r(S)=\frac{f(S)}{N}=\frac{n^{\underline{o}}\ de\ veces\ que\ ocurre\ S}{n^{\underline{o}}\ de\ observaciones\ realizadas}$$
  Ejemplo: Si lanzamos un dado 7 veces y 3 de ellas nos sale par, la frecuencia relativa del suceso "par" es $\frac{3}{7}$.

Operaciones con Sucesos

- **Unión:** $\boldsymbol{A\cup B}$ es el suceso formado por todos los elementos de *A* y de *B*. Se verifica cuando ocurre uno de los dos, *A* o *B*.
- **Intersección:** $\boldsymbol{A\cap B}$ es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de *A* y de *B*. Se verifica cuando ocurren simultáneamente *A* y *B*.
- **Diferencia:** $\boldsymbol{A-B}$ es el suceso formado por todos los elementos de *A* que no son de *B*. Se verifica cuando lo hace *A* y no *B*.
- **Complementario:** $\boldsymbol{A'=E-A}$ se llama al suceso contrario de *A*. Se verifica siempre y cuando no se verifique *A*.
- **Sucesos Incompatibles:** Dos sucesos, *A* y *B*, se llaman incompatibles cuando no tienen ningún elemento en común. Es decir, cuando $\boldsymbol{A\cap B=\emptyset}$. Los sucesos incompatibles no se pueden verificar simultáneamente.

Propiedades de las operaciones con sucesos

Distributivas	$\boldsymbol{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$ $\boldsymbol{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$
De Simplificación	$\boldsymbol{A\cup(B\cap A)=A}$ $\boldsymbol{A\cap(B\cup A)=A}$
Con el complementario	$\boldsymbol{(A')'=A}$ $\boldsymbol{A-B=A\cap B'}$ $\boldsymbol{(A\cup B)'=A'\cap B'}$ $\boldsymbol{(A\cap B)'=A'\cup B'}$

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Propiedades de las Probabilidades

La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1. Enunciaremos el resto de las propiedades a continuación:

Para cualquier suceso *S*, su probabilidad es un número entre 0 y 1	$0 \leq P[S] \leq 1$
Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es la suma de probabilidades	$A \cap B = \emptyset \rightarrow P[A \cup B] = P[A] + P[B]$
Probabilidad del suceso seguro	$P[E] = 1$
Probabilidad del complementario	$P[A'] = 1 - P[A]$
Probabilidad del suceso imposible	$P[\emptyset] = 0$
Un suceso contenido en otro suceso	$Si\ A \subset B \rightarrow P[B] = P[A] + P[B - A]$
	$Si\ A \subset B \rightarrow P[A] \leq P[B]$
Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles	$Si\ A_1, A_2, \dots, A_k\ son\ incompatibles\ dos\ a$ $= P[A_1] + P[A_2] + \cdots + P[A_k$
Probabilidad de la unión de dos sucesos	$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$
Si el espacio muestral *E* es finito y un suceso $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, entonces…	$P[S] = P[x_1] + P[x_2] + \cdots + P[x_k]$

Ley de Laplace

La ley de Laplace se aplica para el cálculo de probabilidades en espacios muestrales en los que los sucesos elementales tienen la misma probabilidad. Se enuncia de la siguiente manera:

Si $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $P[x_1] = P[x_2] = \cdots = P[x_n]$, entonces:

$$\boxed{P[S] = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ elementos\ de\ S}{n} = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ "casos\ favorables"\ a\ S}{n^{\underline{o}}\ de\ "casos\ posibles"}}$$

<u>Ejemplo</u>: Al lanzar un dado perfectamente construido, la probabilidad de sacar cualquiera de los números coincide $P[1] = P[2] = P[3] = P[4] = P[5] = P[6] = \frac{1}{6}$. *Por tanto, la probabilidad de sacar un número par sería* $P[par] = \frac{n^{\underline{o}}\ casos\ favorables}{n^{\underline{o}}\ casos\ posibles} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

<u>*Instrumentos irregulares*</u>

Cuando el instrumento es irregular (*E.j. Un dado mal construido*), para evaluar la probabilidad de un suceso utilizamos la **ley de los Grandes Números**. Efectuaremos un número *N*, grande de experiencias, y la frecuencia relativa $f_r(S)$ nos dará una medida aproximada de la probabilidad.

<u>Ejemplo</u>: Si lanzamos un dado trucado 1000 veces y en 254 ocasiones nos sale número par, $P[par] \approx f_r(par) = \frac{254}{1000} = 0{,}254$

<u>*Instrumentos regulares con sucesos elementales no equiprobables*</u>

<u>Ejemplo</u>: Lanzamos dos dados correctos y sumamos sus resultados. El espacio muestral de esta experiencia es $E = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. *Pero no es igualmente probable que la suma sea 2 ó 7 ó 10. Modificaremos la descripción de la experiencia para que los sucesos elementales sean equiprobables.*

1er DADO

2º DADO: +	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ahora el espacio muestral consta de 36 sucesos elementales $(1{,}1), (2{,}2), \dots\ (6{,}6)$, *todos ellos con la misma probabilidad. Luego la probabilidad de que sumen 7 se calculará como sigue:*

$$P[suma\ 7] = \frac{n^{\underline{o}}\ casos\ favorables}{n^{\underline{o}}\ casos\ posibles} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

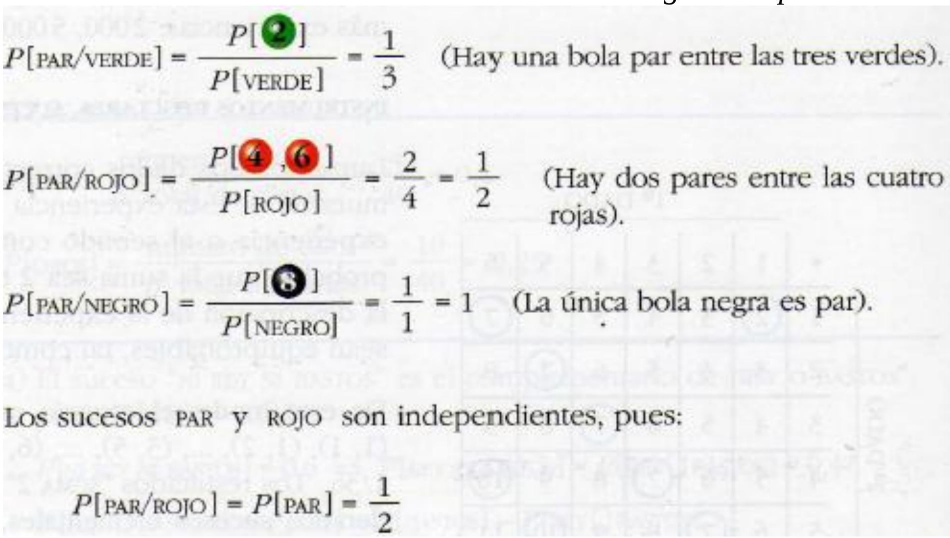
Probabilidad Condicionada

Dados dos sucesos, A y C, se llama **probabilidad de A condicionada a C** a la proporción de veces que ocurre A de entre las que ocurre C.

$P[A/C] = \dfrac{P[A\cap C]}{P[C]}$ De esta expresión deducimos la siguiente: $P[A\cap C] = P[C].P[A/C]$

<u>Ejemplo:</u> Si en una bolsa tenemos las siguientes bolas

Se tienen las siguientes probabilidades:



$P[\text{PAR/VERDE}] = \dfrac{P[2]}{P[\text{VERDE}]} = \dfrac{1}{3}$ (Hay una bola par entre las tres verdes).

$P[\text{PAR/ROJO}] = \dfrac{P[4, 6]}{P[\text{ROJO}]} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ (Hay dos pares entre las cuatro rojas).

$P[\text{PAR/NEGRO}] = \dfrac{P[8]}{P[\text{NEGRO}]} = \dfrac{1}{1} = 1$ (La única bola negra es par).

Los sucesos PAR y ROJO son independientes, pues:

$P[\text{PAR/ROJO}] = P[\text{PAR}] = \dfrac{1}{2}$

<u>Sucesos independientes</u>

Dos sucesos, A y C, son independientes cuando $P[A/C] = P[A]$ y $P[C/A] = P[C]$.

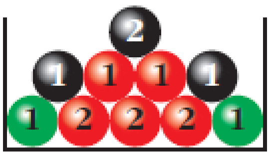
Cuando dos sucesos son independientes la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades.

$A \text{ y } C \text{ independientes} \rightarrow P[A\cap C] = P[A].P[C]$

<u>Estudio de la probabilidad en tablas de contingencia</u>

Podemos utilizar tablas de contingencia para el cálculo de probabilidades condicionadas. Estas tablas recogen datos que relacionan dos características. Lo vemos mejor con un ejemplo.

<u>Ejemplo:</u> Tenemos una urna con bolas rojas, verdes y negras. Cada una de ellas tiene un número asociado, 1 ó 2.



La tabla de contingencia en la que se relaciona el color y el número de cada bola es

	V	R	N	
1	2	2	2	6
2	0	3	1	4
	2	5	3	10

Según esto, la probabilidad de tener un "2" siendo "roja" la bola se calcularía así:

$P[2/R] = \dfrac{3}{5}$ *(3 bolas "rojas" con un "2" de un total de 5 bolas "rojas")*

Y de la misma forma:

$P[1/R] = \dfrac{2}{5}$ $\quad P[1/V] = \dfrac{2}{2} = 1$

$P[2/V] = \dfrac{0}{2} = 0$ $\quad P[1/N] = \dfrac{2}{3}$

$P[2/N] = \dfrac{1}{3}$

Experiencias Compuestas

Las experiencias compuestas son aquellas en las que se pueden distinguir dos o más etapas.

<u>Ejemplos</u>:

- *Lanzamos de una moneda y un dado. El resultado de una no influye en la otra. Son* ***experiencias independientes****.*
- *Extraemos dos cartas de la misma baraja. El resultado de la segunda depende de la primera (Si sacáramos en la primera un REY, sería menos probable sacarlo en la segunda). Son* ***experiencias dependientes****.*

Experiencias independientes

En este caso la probabilidad del suceso compuesto el igual al producto de las probabilidades de los sucesos componentes.

Si n pruebas son independientes y los sucesos $S_1, S_2, \dots, S_n$ corresponden, respectivamente, a cada una de ellas se cumple:

$P[S_1 \text{ en la } 1^{\underline{a}} \text{ y } S_2 \text{ en la } 2^{\underline{a}} \text{ y} \dots S_n \text{ en la } n-\text{ésima}] = P[S_1].P[S_2]\dots P[S_n]$.

<u>Ejemplo</u>: *Al lanzar un dado y una moneda, la probabilidad de sacar "cara" y "par" es*

$$P[cara\ y\ par] = P[cara].P[par] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Experiencias dependientes

En este caso la probabilidad de sucesos compuestos se obtiene mediante las probabilidades condicionadas.

$P[S_1 \text{ en la } 1^{\underline{a}} \text{ y } S_2 \text{ en la } 2^{\underline{a}}] = P[S_1].P[S_2/S_1]$

Si se encadenan más de dos experiencias dependientes, se operaría de la misma forma:
$P[S_1 \text{ en la } 1^{\underline{a}} \text{ y } S_2 \text{ en la } 2^{\underline{a}} \text{ y } S_3 \text{ en la } 3^{\underline{a}}] = P[S_1].P[S_2/S_1].P[S_3/S_1 \text{ y } S_2]$

<u>Ejemplo</u>: *Al extraer dos cartas de la misma baraja, la probabilidad de sacar dos "REYES" es*

$$P[REY\ y\ REY] = P[REY \text{ en la } 1^{\underline{a}}].P[REY \text{ en la } 2^{\underline{a}} \ /\ REY \text{ en la } 1^{\underline{a}}] = \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

Probabilidad Total

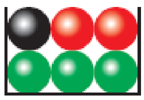
Dados n sucesos, $A_1, A_2, \dots A_n$, incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n = E$. Entonces para cualquier suceso *S* se cumple:

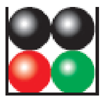
$\boldsymbol{P[S] = P[A_1].P[S/A_1] + P[A_2].P[S/A_2] + \cdots + P[A_n].P[S/A_n]}$

Para resolver este tipo de problemas es muy útil representar diagramas de árbol para cada una de las etapas. Lo vemos con un ejemplo.

<u>Ejemplo:</u>

Tenemos dos urnas. La experiencia consiste en extraer una bola de I, introducirla en II, remover y extraer, finalmente, una bola de II.

I 

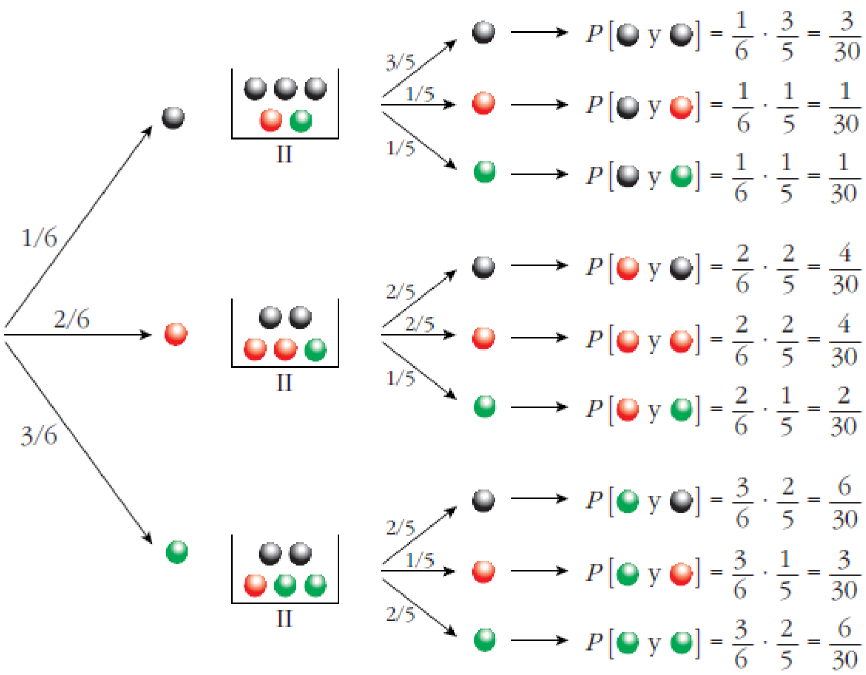
II 

Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea:

a) roja

b) verde

c) negra



a) $P[2^{\underline{a}}\ ] = \frac{1}{30} + \frac{4}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

b) $P[2^{\underline{a}}\ ] = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{6}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

c) $P[2^{\underline{a}}\ ] = \frac{3}{30} + \frac{4}{30} + \frac{6}{30} = \frac{13}{30}$

TEOREMA DE BAYES:

Sean los siguientes sucesos:

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos, tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero.
- B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$.

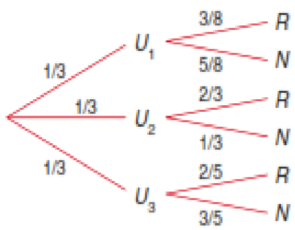
Entonces las probabilidades $P(A_i/B)$ vienen dada por la expresión:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

Las probabilidades $P(A_i)$ reciben el nombre de **probabilidades** *a priori*, $P(A_i/B)$ se llaman **probabilidades** *a posteriori* y $P(B/A_i)$ se denominan **verosimilitudes.**

Tenemos tres urnas distintas: U_1 con tres bolas rojas y cinco negras, U_2 con dos bolas rojas y una negra, y U_3 con dos bolas rojas y tres negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la urna U_1?

Sean los sucesos R = {Sacar bola roja} y N = {Sacar bola negra}. En el diagrama de árbol adjunto pueden verse las distintas probabilidades de ocurrencia de los sucesos R o N para cada una de las tres urnas.



La probabilidad pedida es $P(U_1/R)$. Utilizando el teorema de Bayes, tenemos:

$$P(U_1/R) = \frac{P(U_1) \cdot P(R/U_1)}{P(U_1) \cdot P(R/U_1) + P(U_2) \cdot P(R/U_2) + P(U_3) \cdot P(R/U_3)} =$$

$$= \frac{(1/3) \cdot (3/8)}{(1/3) \cdot (3/8) + (1/3) \cdot (2/3) + (1/3) \cdot (2/5)} = \frac{45}{173} = 0{,}260$$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA

Las distribuciones de probabilidad son idealizaciones de las distribuciones de frecuencias relativas. Para una variable discreta (variable que tiene un conjunto definido de valores posibles), la distribución de probabilidad es el resultado de asignar a cada valor de la variable su probabilidad.

x_i	$P[x_i] = p_i$
x_1	p_1
x_2	p_2
.	.
.	.
.	.
x_n	p_n

$$0 \leq p_i \leq 1$$
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum p_i = 1$$

Ejemplos:

1. *"Número obtenido" al lanzar un dado.*

x_i	1	2	3	4	5	6
$p_i = P[x_i]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

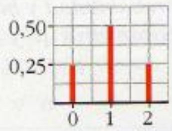
	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

2. *"Suma de los resultados" al lanzar dos dados.*

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3. *"Número de caras" al lanzar dos monedas.*

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$



Parámetros en Distribuciones de Probabilidad de Variable Discreta

Se definen de forma similar a los parámetros de distribuciones estadísticas, teniendo en cuenta que las probabilidades p_i son idealizaciones de las frecuencias relativas $\frac{f_i}{N}$.

Media	$\mu = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = \sum p_i x_i$
Varianza	$\sigma^2 = p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \cdots + p_n(x_n - \mu)^2 = \sum p_i(x_i - \mu)^2$
	$\sigma^2 = (p_1 {x_1}^2 + p_2 {x_2}^2 + \cdots + p_n {x_n}^2) - \mu^2 = \sum p_i {x_i}^2 - \mu^2$
Desviación típica	$\sigma = \sqrt{varianza}$

Ejemplo: En una bolsa hay 20 bolas numeradas: 9 con un "1", 5 con un "2" y 6 con un "3". Se extraerá una bola al azar. Construir la distribución de probabilidad y calcular sus parámetros μ y σ.

$P[1] = \frac{9}{20} = 0{,}45$; $P[2] = \frac{5}{20} = 0{,}25$; $P[3] = \frac{6}{20} = 0{,}30$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
1	0,45	0,45	0,45
2	0,25	0,50	1,00
3	0,30	0,90	2,70
	1	1,85	4,15

$\mu = \Sigma p_i x_i = 1{,}85$

$\sigma^2 = \Sigma p_i x_i^2 - \mu^2 = 4{,}15 - 1{,}85^2 = 0{,}7275$

$\sigma = \sqrt{0{,}7275} = 0{,}85$

La Distribución Binomial

Experiencia dicotómica: Si en una experiencia aleatoria destacamos un suceso *A* y prestamos atención, exclusivamente, a si ocurre *A* o su contrario, *A'*, se trata de una experiencia dicotómica.

El suceso *A* se denomina **éxito,** y su probabilidad es $P[A] = p$. El suceso contrario tendrá una probabilidad $P[A'] = 1 - P[A] = 1 - p = q$.

<u>*Ejemplos:*</u>

- *Lanzamos una moneda: A="cara", A'="cruz"*

  $p = P[cara] = \frac{1}{2}$

  $q = P[cruz] = \frac{1}{2}$
- *Lanzamos un dado y vemos si sale "5":* $A = \{5\}, A' = \{1,2,3,4,6\}$

  $p = P["5"] = \frac{1}{6}$

  $q = P["no\ 5"] = \frac{5}{6}$

Distribución binomial: Repetimos *n* veces una misma experiencia dicotómica y nos preguntamos por el número *x* de éxitos. La variable *x* es discreta y puede tomar valores entre 0 y *n*. La distribución de probabilidad de la variable *x* se llama **distribución binomial** $\boldsymbol{B(n,p)}$, siendo *p* la probabilidad de éxito de cada experiencia y *n* el número de veces que se repite.

<u>*Ejemplos:*</u>

- *Lanzamos 10 monedas y nos preguntamos por el número de caras: n=10, p=0,5.*
- *Lanzamos 6 dados correctos y nos preguntamos por el número de "cincos":* $n = 6, p = \frac{1}{6}$.

<u>*Cálculo de Probabilidades en una Distribución Binomial*</u>

Si *x* es una variable que sigue una distribución $B(n,p)$, la probabilidad $P[x = k]$ de obtener *k* éxitos es:

$$\boxed{\boldsymbol{P[x = k] = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}}}$$

Siendo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Los parámetros de esta distribución son:

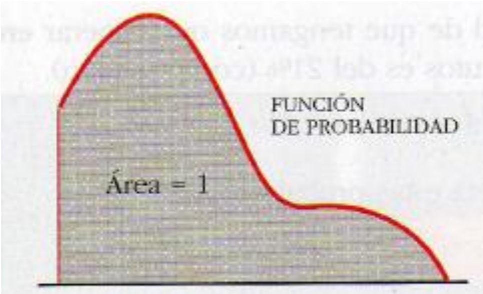
Media	$\boldsymbol{\mu = n \cdot p}$
Varianza	$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$

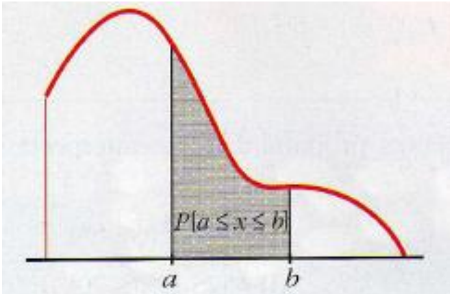
DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE VARIABLE CONTINUA

Las distribuciones de probabilidad de variable continua son idealizaciones de las distribuciones estadísticas de variable continua. Recordemos que las variables continuas son aquellas que toman su valor entre un rango infinito de valores posibles.

Estas distribuciones se definen por medio de la **función de densidad** o **función de probabilidad** $\boldsymbol{y = f(x)}$.

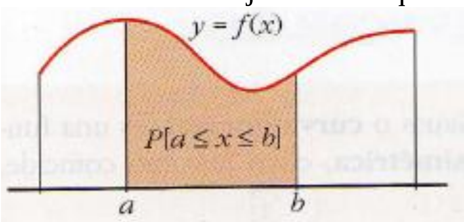
PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD
$f(x) \geq 0 \ para\ todo\ x$
$El\ área\ bajo\ la\ curva\ y = f(x)\ es\ 1$
$P[a \leq x \leq b] = área\ bajo\ la\ curva\ en\ el\ intervalo\ [a, b]$
$Las\ probabilidades\ de\ sucesos\ puntuales\ son\ 0$ $P[x = a] = 0, P[x = b] = 0, \dots \rightarrow P[a \leq x \leq b] = P[a < x < b]$





Cálculo de Probabilidades a Partir de la Función de Probabilidad

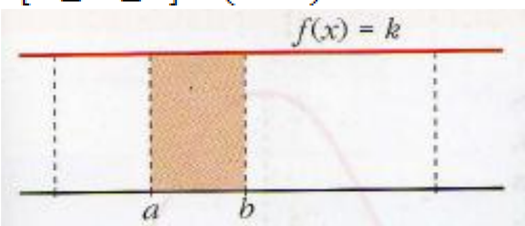
Para calcular probabilidades en una distribución de probabilidad de variable continua, hallamos el área bajo la curva que representa la función $y = f(x)$.



<u>*Ejemplo*</u>*:*

Para el caso sencillo de una distribución uniforme ($f(x) = k$), la probabilidad es el área de un rectángulo de base $b - a$ y altura k.

$P[a \leq x \leq b] = (b - a) \cdot k$

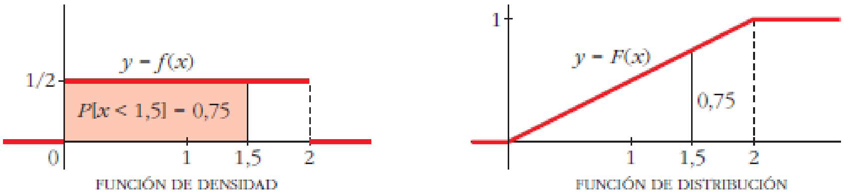


Función de Distribución

La **función de distribución** $\boldsymbol{F(x)}$ de una variable aleatoria ***t*** describe los valores que toma la probabilidad acumulada hasta la abscisa.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN
$F(x) = P[t \leq x]$
$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
$Si\ la\ función\ toma\ valores\ no\ nulos\ en\ el\ intervalo\ [a, b] \rightarrow$ $F(x) = 0\ para\ x \leq a$ $F(x) = 1\ para\ x \geq b$

Ejemplo:
Variable aleatoria continua de función de probabilidad uniforme.



El área acumulada hasta el punto 0 es 0 $\rightarrow$ $F(x) = 0$ si $x \leq 0$

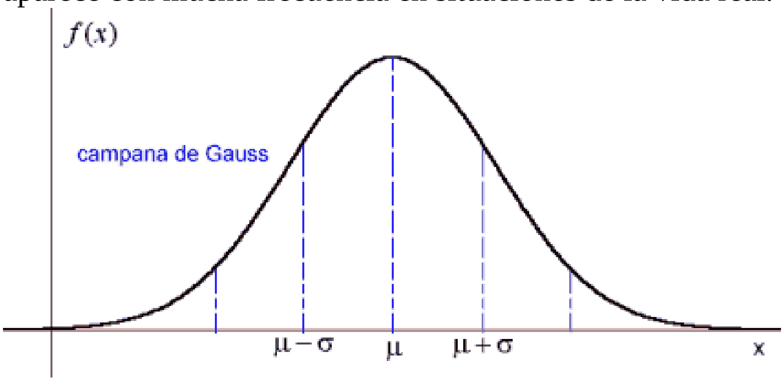
El área acumulada hasta el punto 1,5 es $1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75$ $\rightarrow$ $F(1{,}5) = 0{,}75$

Si $x \in [0,\ 2]$, $P[t \leq x] = \dfrac{1}{2}x$ $\rightarrow$ $F(x) = \dfrac{1}{2}x$ si $x \in [0,\ 2]$

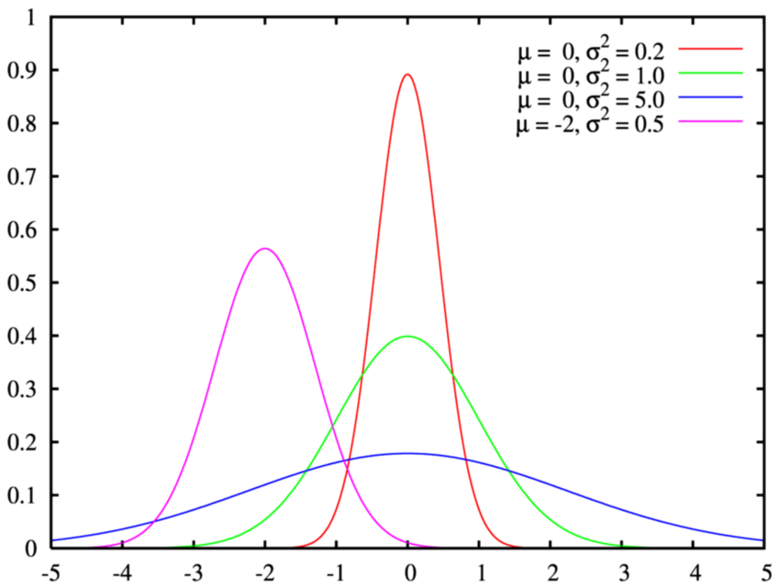
Si $x \geq 2$, $P[t \leq x] = 1$, pues en el punto 2 ya se ha acumulado toda el área disponible. $\rightarrow$ $F(x) = 1$ si $x \geq 2$

La Distribución Normal

La campana de Gauss o **curva normal** es una función de probabilidad continua y simétrica cuyo máximo coincide con la media μ. Esta curva es de gran importancia debido a que aparece con mucha frecuencia en situaciones de la vida real.

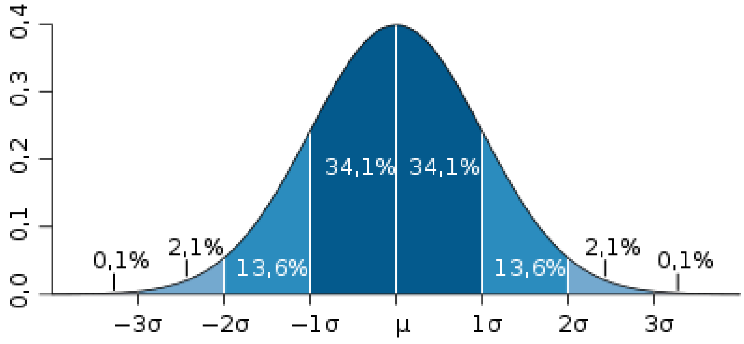


Cada curva normal está definida por una media μ y una desviación típica σ, y se denomina $\boldsymbol{N(\mu, \sigma)}$.



Distribución de probabilidades bajo la curva normal

El reparto de probabilidades en una distribución $N(\mu,\sigma)$ cualquiera, se realiza del siguiente modo:



Cálculo de probabilidades en distribuciones normales

Tabla de áreas bajo la curva normal $N(0,1)$

La tabla del anexo de este tema nos da las probabilidades $P[z \leq k]$ para valores de k entre 0 y 4, de centésima en centésima.

El valor de k se busca así:

- **Unidades** y **décimas** en la columna de la izquierda
- **Centésimas** en la fila de arriba

El número que nos da la tabla será el valor de $P[z \leq k]$

Cálculo de probabilidades en una distribución $N(0,1)$

- Si $k \geq 0$, las probabilidades $P[z \leq k] = P[z < k]$ se encuentran directamente en las tablas
- $P[z \geq k] = 1 - P[z \leq k]$
- Para abscisas negativas, $P[z \leq -k] = P[z \geq k] = 1 - P[z \leq k]$

Cálculo de probabilidades en una distribución $N(\mu,\sigma)$

Si x es $N(\mu,\sigma)$, para calcular $P[h < x < k]$ se utilizará la tabla de la curva $N(0,1)$ **tipificando la variable**, es decir, haciendo el cambio $k \to \frac{k-\mu}{\sigma}$.

$$\boxed{P[h < x < k] = P\left[\frac{h-\mu}{\sigma} < z < \frac{k-\mu}{\sigma}\right]}$$

Ejemplo:

En una distribución $N[6,4]$ calcula las siguientes probabilidades:

a) $P[x \leq 3]$
b) $P[x \geq 12]$
c) $P[5 \leq x \leq 8]$

a) $P[x \leq 3] = P\left[z \leq \frac{3-6}{4}\right] = P[z \leq -0{,}75] = 1 - P[z \leq 0{,}75] = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$

b) $P[x \geq 12] = P\left[z \geq \frac{12-6}{4}\right] = P[z \geq 1{,}5] = 1 - P[z \leq 1{,}5] = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

c) $P[5 \leq x \leq 8] = P\left[\frac{5-6}{4} \leq z \leq \frac{8-6}{4}\right] = P[-0{,}25 \leq z \leq 0{,}5] = P[z \leq 0{,}5] - P[z \leq -0{,}25] = P[z \leq 0{,}5] - (1 - P[z \leq 0{,}25]) = 0{,}6915 + 0{,}5987 - 1 = 0{,}2902$

Aproximación de la binomial por la normal:Teorema de Moivre

Si: $n \cdot p \geq 5$ *y* $n \cdot q \geq 5$.

*La **distribución binomial B(n, p)** se puede aproximar mediante una **distribución normal**:*

$$N\left(np, \sqrt{npq}\right)$$

$$\begin{tikzcd} & N(np, \sqrt{npq}) \arrow[d] \\ B(n,p) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}} \rightarrow N(0,1) \end{tikzcd}$$

Ejemplo: *En una ciudad una de cada tres familias posee teléfono. Si se eligen al azar 90 familias, calcular la probabilidad de que entre ellas haya por lo menos 30 tengan teléfono.*

$$n = 90 \qquad p = \frac{1}{3} \qquad q = \frac{2}{3}$$

$$n \cdot p > 5 \qquad n \cdot q > 5$$

$$B\left(90, \frac{1}{3}\right) \rightarrow N\left(90 \cdot \frac{1}{3}, \sqrt{90 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}\right) = N(30,\ 4.47)$$

$$p(X > 30) = p\left(Z > \frac{30-30}{4.47}\right) = p(Z > 0) = 1 - p(Z \leq 0) = 0.5$$