4. El problema del transporte

Un problema particular que se resuelve con los procedimientos de la programación lineal es la situación conocida como **problema del transporte** o **problema de la distribución de mercancías.**

Destinos / Orígenes	1	2	…	n	Ofertas
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
Demandas	b_1	b_2	…	b_n	

La estructura que presentan estos problemas es la siguiente:

Se dispone de m centros de producción u **orígenes,** con sus respectivas **ofertas;** y n centros de consumo o **destinos,** con sus **demandas** correspondientes. A su vez, son conocidos los **costes de envío,** desde cada origen hasta cada destino.

Todos los datos anteriores suelen expresarse a través de una tabla o matriz de costes como la que podemos ver en el margen.

- El **objetivo** de todo **problema de transporte** es determinar **cuántas unidades de producto** deben enviarse desde cada origen hasta cada destino de forma que se minimicen los costes totales de distribución, se satisfaga la demanda de cada destino y no se exceda la capacidad de oferta de cada uno de los orígenes.

En las actividades resueltas que siguen vemos la resolución de distintas situaciones de transporte o distribución.

ACTIVIDADES RESUELTAS

8. Para abastecer de madera a tres aserraderos, A_1, A_2 y A_3, hay dos bosques, B_1 y B_2, que producen 26 toneladas y 30 toneladas, respectivamente. Las necesidades de cada aserradero son 20, 22 y 14 toneladas, respectivamente. Si los costes de transporte por tonelada de los bosques a los aserraderos son, en cientos de euros, los que se indican en la tabla adjunta, propón el transporte con el coste mínimo.

Aserraderos / Bosques	A_1	A_2	A_3
B_1	1	3	1
B_2	2	1	1

Si llamamos x a la cantidad de madera que proporciona el bosque B_1 al destino A_1, e y a la cantidad de madera que proporciona el bosque B_1 al destino A_2, toda la distribución de madera queda, en función de las variables anteriores, en la forma que se recoge en la tabla.

x	y	$26 - x - y$
$20 - x$	$22 - y$	$-12 + x + y$

Las cantidades de entrega de los bosques a los aserraderos deben ser no negativas, es decir, deben cumplir las desigualdades siguientes:

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ 20 - x \geq 0,\ 22 - y \geq 0,\ 26 - x - y \geq 0,\ -12 + x + y \geq 0$$

Simplificando las desigualdades anteriores, obtenemos las siguientes inecuaciones:

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \leq 20,\ y \leq 22,\ x + y \leq 26,\ x + y \geq 12$$

Teniendo en cuenta la tabla de costes del enunciado y la tabla anterior, resulta la siguiente función objetivo que se ha de minimizar:

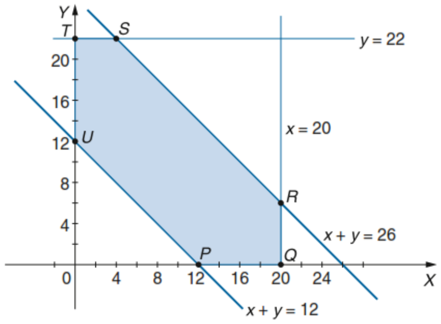
$$z = 1 \cdot x + 3 \cdot y + 1 \cdot (26 - x - y) + 2 \cdot (20 - x) + 1 \cdot (22 - y) + 1 \cdot (-12 + x + y)$$

Operando y simplificando, obtenemos la función $z = -x + 2y + 76$.

El programa lineal a resolver es:

Minimizar la función $z = -x + 2y + 76$ sujeta a:

$$\begin{cases} x \le 20 \\ y \le 22 \\ x + y \le 26 \\ x + y \ge 12 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$



Los valores de la función objetivo en los vértices $P(12, 0)$, $Q(20, 0)$, $R(20, 6)$, $S(4, 22)$, $T(0, 22)$ y $U(0, 12)$ de la región factible son:

$$z_P = 64,\ z_Q = 56,\ z_R = 68,\ z_S = 116,\ z_T = 120 \text{ y } z_U = 100$$

Observamos que en el vértice Q se minimiza la función objetivo; por tanto, la solución es $x = 20$, $y = 0$, es decir, las cantidades a transportar son las que se recogen en la tabla adjunta.

20	0	6
0	22	8

9. Desde dos almacenes, A y B, se tiene que distribuir fruta a tres mercados de la ciudad. El almacén A dispone de 10 toneladas de fruta diarias y el B de 15 toneladas, que se reparten en su totalidad. Los dos primeros mercados necesitan, diariamente, 8 toneladas de fruta, mientras que el tercero necesita 9 toneladas diarias. El coste del transporte de cada almacén a cada mercado viene dado en la tabla. Planifica el transporte para que el coste sea mínimo.

Almacén \ Mercado	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
A	10	15	20
B	15	10	10

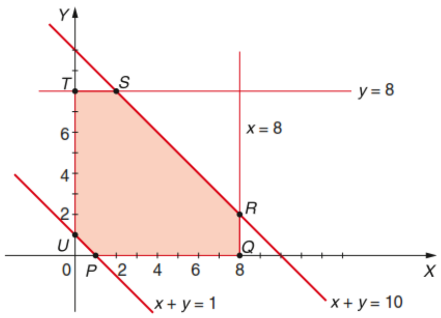
Procediendo como en el problema anterior y llamando x a la cantidad de mercancía que entrega el almacén A al mercado 1, e y a la mercancía que entrega el almacén A al mercado 2, el resto de la mercancía se distribuye en la forma que se recoge en la tabla.

x	y	$10 - x - y$
$8 - x$	$8 - y$	$-1 + x + y$

Expresamos las restricciones dadas por las condiciones de no negatividad, y formulamos la función objetivo, obteniendo el programa lineal siguiente:

Minimizar la función $z = 390 - 15x - 5y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x \le 8 \\ y \le 8 \\ x + y \le 10 \\ x + y \ge 1 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$



Los valores de la función objetivo $z = 390 - 15x - 5y$ en los vértices $P(1, 0)$, $Q(8, 0)$, $R(8, 2)$, $S(2, 8)$, $T(0, 8)$ y $U(0, 1)$ de la región factible son los siguientes:

$$z_P = 375,\ z_Q = 270,\ z_R = 260,\ z_S = 320,\ z_T = 350 \text{ y } z_U = 385$$

Observamos que en el vértice R se minimiza la función objetivo; por tanto, la solución es $x = 8$, $y = 2$, es decir, las cantidades a transportar son las que se recogen en la tabla adjunta.

8	2	0
0	6	9