OPCIÓN A

1. a) Dada la matriz ampliada del sistema

$$\overline{A} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{A}$$

Calculamos:

$|A| = \lambda^2 + \lambda - 2$

$|A| = 0 \iff \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Entonces: si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow R(A) = R(\overline{A}) = 3$ que por el teorema de Rouché-Fröbenius se trata de un sistema compatible determinado. (Sol. única).

- Si $\lambda = 1 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R(A) = 2$

y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow R(\overline{A}) = 2$

$\Rightarrow$ Por el T. de Rouché-Fröbenius es un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

- Si $\lambda = -2 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Como $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow R(A) = 2$

y como $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow R(\overline{A}) = 3$

Por el TRF Sist. Incompatible (Sin solución)

b) Para $\lambda = 1$ sabemos que el sistema es compatible indeterminado, y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ es equivalente a resolver el sist formado por las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x \quad + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 0 \end{cases}$$

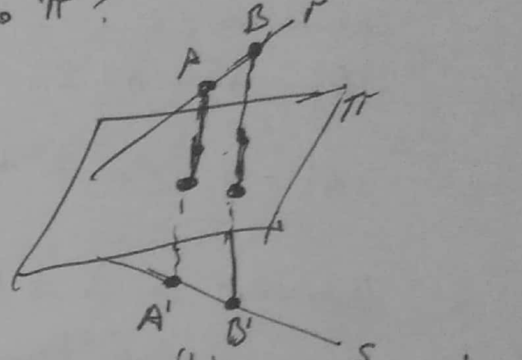
$x+y+z=1 \longrightarrow y + 1 = 1 \rightarrow y = 0$ (sustituyendo $x+z=1$)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

② ¿s simétrica a r respecto al plano π?

Siendo $r \equiv x+2 = y = z-2$

$\pi \equiv x - z + 2 = 0$



simétricos de A y B respecto de π $\Rightarrow s \equiv \begin{cases} A' \\ \overrightarrow{A'B'} \end{cases}$

Pasamos r a paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Para $\lambda = 0$ tenemos el punto $A(-2, 0, 2)$

$\lambda = 1$ " " " $B(-1, 1, 3)$

Hallamos los simétricos de A y de B respecto de π,

siendo $\overrightarrow{n_\pi} = (1, 0, -1)$, entonces:

Primero hallamos el punto medio de $\overline{AA'}$:

$M_{AA'} = t_1 \cap \pi$ con $t_1 \perp \pi$ y $A \in t_1 \equiv \begin{cases} x = -2 + \mu \\ y = 0 \\ z = 2 - \mu \end{cases}$; $\mu \in \mathbb{R}$

punto medio de $\overline{AA'}$

$t_1 \cap \pi \Rightarrow -2 + \mu - (2 - \mu) + 2 = 0 \Rightarrow -2 + 2\mu = 0$

$\Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow M_{AA'}(-1, 0, 1)$

y $A' = 2M_{\overline{AA'}} - A$

$\boxed{A'} = (-2, 0, 2) - (-2, 0, 2) = \boxed{(0, 0, 0)}$

Análogamente calculamos el simétrico de B:

Primero hallamos la proyección de B sobre π que es el punto medio del segmento $\overline{BB'}$, $M_{\overline{BB'}}$:

$M_{\overline{BB'}} \equiv t_2 \cap \pi$ siendo $t_2 \perp \pi$ y $B \in t_2 \Rightarrow t_2 \equiv \begin{cases} x = -1+\beta \\ y = 1 \\ z = 3-\beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$

Luego, $t_2 \cap \pi$ es: $-1+\beta-(3-\beta)+2=0$

$-1+\beta-3+\beta+2=0 \Rightarrow \beta = 1$

y $t_2 \cap \pi = M_{\overline{BB'}}(0,1,2)$

y el simétrico de B es: $B' = 2M_{\overline{BB'}} - B$

$\Rightarrow B' = (0,2,4)-(-1,1,3) = (1,1,1)$.

Por lo tanto el vector $\overrightarrow{A'B'} = (1,1,1)$ es el vector director de la recta buscada, proyección de la recta r respecto de π, es decir, $s \equiv \begin{cases} A'(0,0,0) \\ \overrightarrow{A'B'}(1,1,1) \end{cases} \equiv \boxed{\begin{cases} x = \gamma \\ y = \gamma \\ z = \gamma \end{cases} \gamma \in \mathbb{R}}$.

$\boxed{s \equiv x = y = z}$

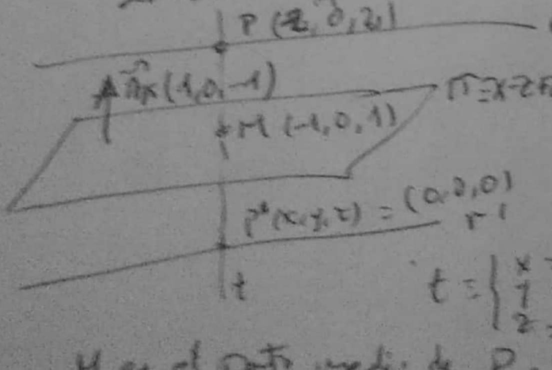
(MÁS CORTA) OTRA FORMA: Estudiamos la posición relativa de r y π:

$P_r(-2+\lambda, \lambda, 2+\lambda) \in \pi \Rightarrow -2+\lambda-2-\lambda+2=0 \Rightarrow 0=2$!! Sin solución

Luego r es paralela al plano π.

La recta simétrica de r respecto de π será la recta que pasa por el simétrico de su punto $P \in r$ y tiene la misma dirección que r, es decir, $r' \equiv \begin{cases} P'(0,0,0) \\ \vec{v}_{r'} = \vec{v}_r = (1,1,1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \gamma \\ y = \gamma \\ z = \gamma \end{cases} \gamma \in \mathbb{R}$

$\boxed{r' \equiv x = y = z}$



Hallemos el simétrico de P respecto de π, P'; para ello hallamos la proyección de P sobre π que es $M = t \cap \pi$, siendo t la recta perpendicular a π que pasa por $P(-2,0,2)$

$t \equiv \begin{cases} x = -2+\mu \\ y = 0 \\ z = 2-\mu \end{cases} \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow P_t \in \pi \Rightarrow -2+\mu-2+\mu+2=0$

$\Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow M(-1,0,1)$

M es el punto medio de P y P' $\Rightarrow \frac{x-2}{2} = -1$, $\frac{y}{2} = 0$, $\frac{z+2}{2} = 1 \Rightarrow P'(0,0,0)$

(3) Dada $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$

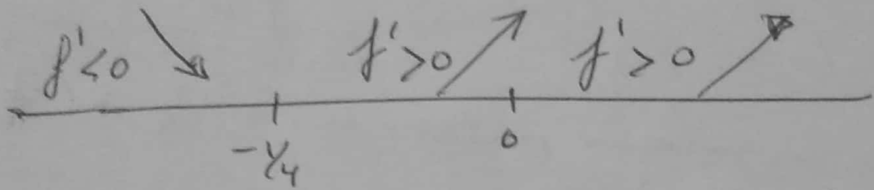
Estudiamos la monotonía de f:

$f'(x) = 12x^3 + 3x^2$

Hallamos los puntos críticos, donde f puede tener extremos relativos: $f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2(4x+1) = 0$

$\Rightarrow x \begin{cases} 0 \\ -1/4 \end{cases}$.

Estudiamos el signo de la función derivada:



Por lo tanto f decrece para $x \in (-\infty, -1/4)$ y crece para $x \in (-1/4, 0) \cup (0, +\infty)$

Por lo tanto alcanza un mínimo relativo en $x = -1/4$

$\left(-1/4, \frac{-257}{256}\right)$ MÍNIMO RELATIVO.

Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f(x)$ ha de anularse en dos puntos y por el teorema de Bolzano por ser f continua en $[-1, -1/4]$ y $f(-1/4) < 0$ y $f(-1) > 0 \Rightarrow \exists\, c_1 \in (-1, -1/4)$ tal que $f(c_1) = 0$.

Análogamente el otro punto del corte al eje OX estará en el intervalo $(0, 1)$.

Es decir f se anula para $c_1 \in (-1, -1/4)$ y $c_2 \in (0, 1)$.

(4) Dada $f(x) = x \cos x$

Hallamos los puntos de corte con el eje OX:

$$x \cos x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \cdot K \quad K \in \{\ldots -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} \end{cases}$$

Por lo tanto la gráfica sólo cortará al eje OX en $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ en el intervalo dado $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Y el área pedida es: $A = \left| \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx \right|$

Hallamos una primitiva:

$$F(x) = \int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx =$$

$u = x \quad du = dx$

$dv = \cos x \, dx \quad v = \operatorname{sen} x$

$$= x \operatorname{sen} x + \cos x$$

Por lo tanto:

$$A = \left| F(\pi/2) - F(0) \right| = \left| \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right| =$$

$$= \left| \frac{\pi}{2} - 1 \right| = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) u^2$$

Scanned by CamScanner

OPCIÓN B:

① Dados $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ y $M=\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}$

hallar a y b para que $|MA|=2$ y $|M+B|=3$

Por un lado tenemos que:

$MA=\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&7\\a+2b&2a+5b\end{pmatrix} \Rightarrow |MA|=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{b-a=2}$

Por otro lado $\Rightarrow$ $|M+B|=\begin{vmatrix}2&1\\1+a&1+b\end{vmatrix}=2b-a+1=3 \Rightarrow$
$|M+B|=3$

$\Rightarrow \boxed{2b-a=2}$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} b-a=2\\ 2b-a=2\end{cases}$ tenemos que $\boxed{\begin{array}{l}a=-2\\ b=0\end{array}}$

② a) Estudiar la posición relativa de $r \equiv x-1=\frac{y+1}{2}=z-1$ y
$\pi \equiv x-y+z=0$.

Sea $P_r(1+\lambda, -1+2\lambda, 1+\lambda)$ $\lambda\in\mathbb{R}$, un punto cualquiera de r, imponemos que $P_r\in\pi \Rightarrow 1+\lambda+1-2\lambda+1+\lambda=0$
$\Rightarrow 3=0$!! No tiene solución, por lo tanto la recta y el plano son paralelos.

b) Hallar π'; $\pi' \parallel \pi$ y $d(\pi,r)=d(\pi',r)$.

Hallamos la distancia de r a π: $d(r,\pi)=d(P_r,\pi)$

siendo $P_r(1,-1,1)\in r \Rightarrow d(r,\pi)=\frac{|3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ u

Buscamos $\pi' \parallel \pi \Rightarrow \pi' \equiv x-y+z+D=0$

Imponemos la condición $d(r,\pi') = \sqrt{3}\, u \Rightarrow$

$$d(r,\pi') = \frac{|1+1+1+D|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |3+D| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3+D=3 \Rightarrow D=0 \text{ Plano } \pi \\ -3-D=3 \Rightarrow D=-6 \text{ Plano } \pi' \end{cases}$$

El plano buscado es $\boxed{\pi' \equiv x-y+z-6=0}$

(3) $f(x) = x\, e^{-x}$

- $\text{Dom} f = \mathbb{R}$
- No tiene asíntotas verticales, pues no existe ningún $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.
- Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$\Rightarrow \boxed{y=0}$ A. Horizontal cuando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{-x} = -\infty \Rightarrow \text{No tiene A. Horizontal cuando } x\to-\infty$$

- A. Oblicuas? Cuando $x\to-\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$$

Luego no tiene A. Oblicua cuando $x\to-\infty$.

- Extremos relativos:

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$f'(x) = 0 \iff (1-x) = 0 \Rightarrow x = 1$ punto crítico.

Estudiamos el signo de f':

$f' > 0$ ↗ ↘ $f' < 0$

$(-\infty, 1)$ creciente | 1 máx relativo | $(1, +\infty)$ decreciente (Monotonía)

f alcanza un máximo relativo en $x=1$:

$$\boxed{\text{Máximo relativo } \left(1, \frac{1}{e}\right).}$$

- Curvatura:

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -e^{-x}(1-x+1) =$$
$$= -e^{-x}(2-x).$$

$f''(x) = 0 \iff (2-x) = 0 \Rightarrow x = 2$

Estudiamos el signo de f'':

$f'' < 0$ | 2 | $f'' > 0$

Convexa $(-\infty, 2)$ | pto. de inflexión | Cóncava $(2, +\infty)$

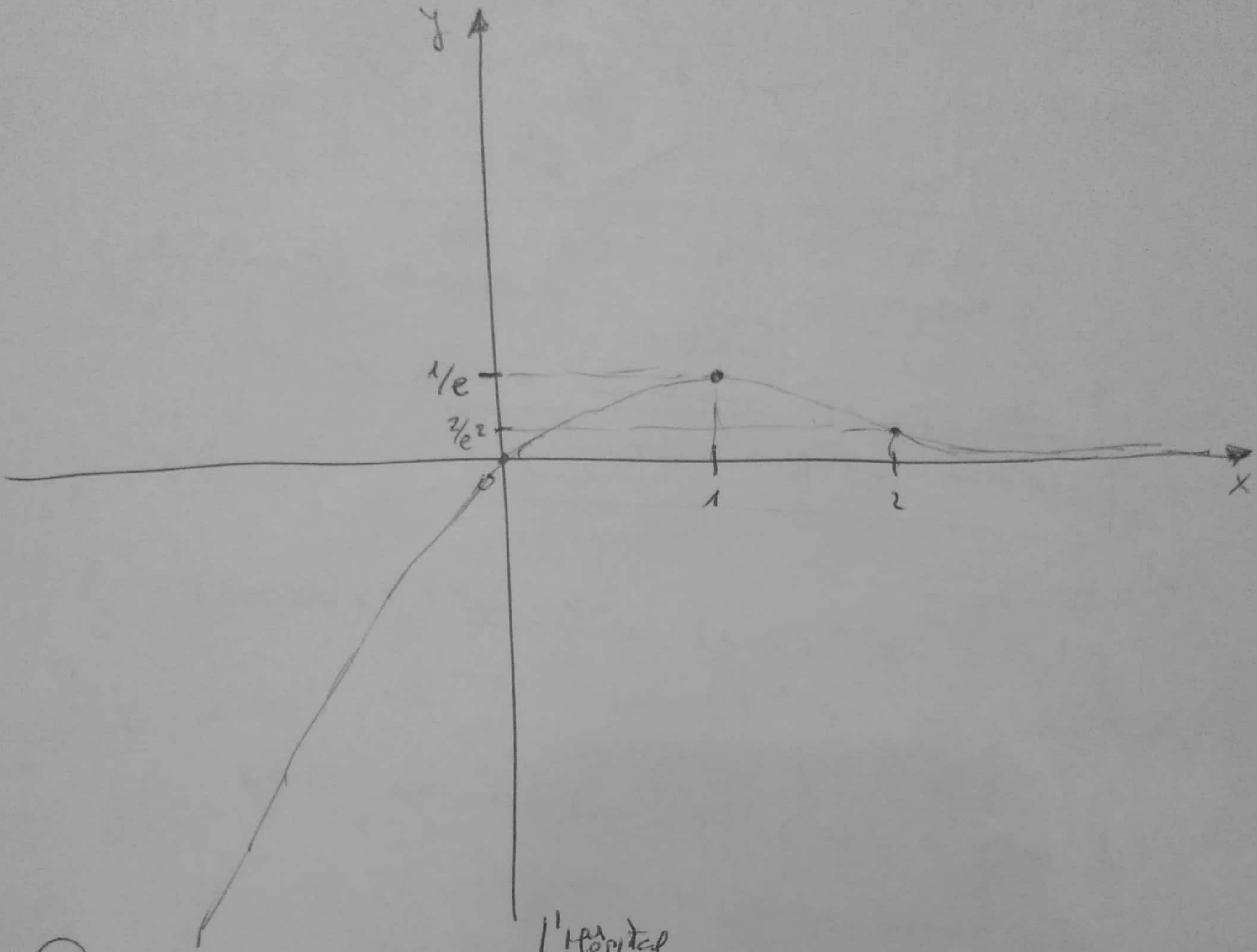
Punto de inflexión $\boxed{\left(2, \frac{2}{e^2}\right).}$

- Cortes con los ejes:

OX: $y = 0 \Rightarrow 0 = x e^{-x} \Rightarrow x = 0$

OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \boxed{(0,0).}$

Esbozo de la gráfica



(4) a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

b) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C = \boxed{\frac{(\ln x)^3}{3} + C}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = \ln x \rightarrow dt = \frac{1}{x}dx \end{array} \right\}$

Julio 2018

A

1) a) Sean x, y, z tres números, tal que: $\begin{cases} x = y + z \\ y = \frac{x}{2} + 3z \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = y + z \\ 2y = x + 6z \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \quad \oplus \begin{cases} x - y = \lambda \\ -x + 2y = 6\lambda \end{cases} \rightarrow x = 8\lambda \Rightarrow$

$\qquad y = 7\lambda$

$\begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$ son las infinitas soluciones, en función de $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Si $\lambda = 1$ una solución es $(8, 7, 1)$.

2) Dados $\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$ y $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

a) Hallar $P = \pi \cap r$:

Pasamos r de implícitas a paramétricas.

Hallamos un punto $Q \in r$: Si $x = 0$ $\begin{cases} y + z = 0 \rightarrow y = -1 \\ -y + z = 2 \end{cases}$

$2z = 2 \rightarrow z = 1$

$\Rightarrow Q(0, -1, 1)$

y hallamos el vector director de r:

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{k} = (2, 0, -2) \parallel (1, 0, -1)$$

Por lo tanto un punto cualquiera de r es de la forma: $P_r(\lambda, -1, 1 - \lambda)$

Calculamos $P = \pi \cap r$, imponiendo que $P_r \in \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 2\lambda - 1 + 1 - \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow \boxed{P(3,-1,-2)}$

b) Hallar $s \subset \Pi$; $P \in s$ y $s \perp r$

Por lo tanto s viene dada por el punto $P(3,-1,-2)$ y el vector director $\vec{v_s}$ que cumple que $\vec{v_s} \perp \vec{v_r}$ y $\vec{v_s} \perp \vec{n_\pi}$ $\Rightarrow \vec{v_s} = \vec{v_r} \times \vec{n_\pi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

$\Rightarrow \vec{v_s} = (1,-3,1)$

y la recta buscada es: $\boxed{s \equiv \begin{cases} x = 3 + \mu \\ y = -1 - 3\mu \\ z = -2 + \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}}$

3 Dada $f(x) = \frac{1}{x} + ax + b$

a) Hallar a y b para que f alcance un mínimo relativo en $(\frac{1}{2}, 6)$.

Si f alcanza un mínimo relativo en $(\frac{1}{2}, 6)$ entonces:

$\begin{cases} f(\frac{1}{2}) = 6 \\ f'(1/2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + \frac{a}{2} + b = a \\ -4 + a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 8 \rightarrow \boxed{b = 2} \\ \boxed{a = 4} \end{cases}$

$\downarrow$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + a$

b) Supuesto que $a = 4$ y $b = 2$, estudiar la continuidad y las asíntotas.

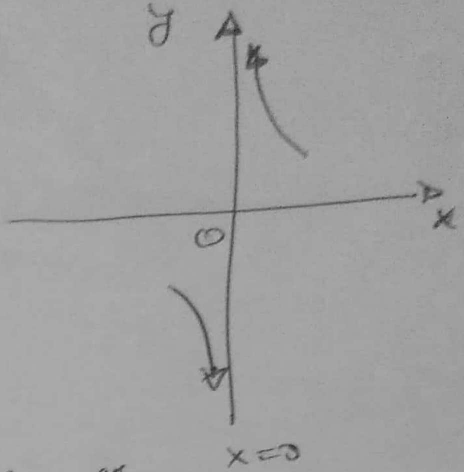
$f(x) = \frac{1}{x} + 4x + 2 = \frac{4x^2 + 2x + 1}{x}$ que es una función racional, continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntotas Verticales:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2+2x+1}{x} = \frac{1}{0} = \pm\infty \Rightarrow \boxed{x=0}$$ Asíntota vertical

Estudiamos los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$



Asíntotas Horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

No tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Oblicuas: $f(x) = 4x + 2 + \frac{1}{x}$

se trata de una hipérbola desplazada de asíntota oblicua $y = 4x+2$ tal que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f$ está por encima de la asíntota cuando $x \to +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow f$ está por debajo de la asíntota cuando $x \to -\infty$

OTRA FORMA: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+2x+1}{x^2} = 4.$$

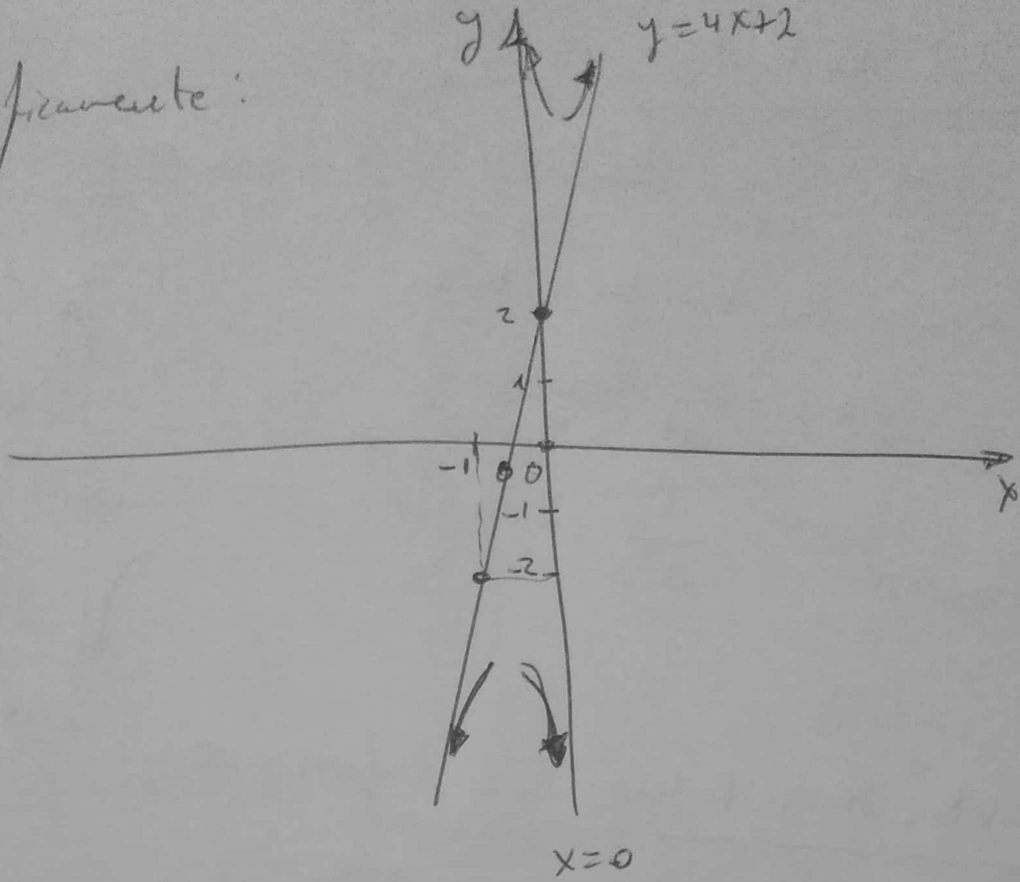
$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2+2x+1}{x} - 4x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$$ $\Rightarrow$ La asíntota oblicua es $\boxed{y = 4x+2}$

Gráficamente:

$y = 4x + 2$

x	y
0	2
-1	-2



④ Dada $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$.

a) Hallar las rectas tangentes a f en $x_0 = 0$ y $x_0 = \pi$

La recta tangente en x_0 es $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$

- $x_0 = 0$; $f(x_0) = f(0) = 0$, $f'(x_0) = f'(0) = 1 \Rightarrow$

$\boxed{y = x}$

- $x_0 = \pi$; $f(x_0) = f(\pi) = 0$ y $f'(x_0) = f'(\pi) = -1 \Rightarrow$

$y = -1(x - \pi) \Rightarrow \boxed{y = \pi - x}$

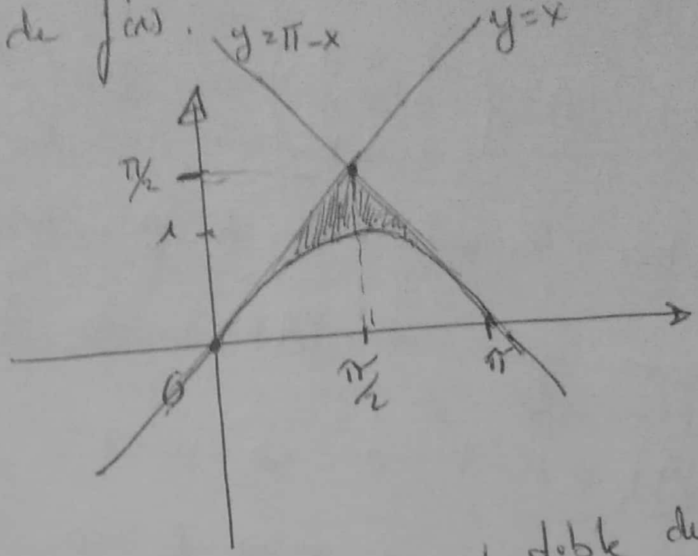
El Punto de corte de las rectas tangentes calculadas es:

$\begin{cases} y = x \\ y = \pi - x \end{cases} \Rightarrow x = \pi - x \Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ $\boxed{y = \frac{\pi}{2}}$

El punto de corte es $\boxed{P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$

b) Hallar el área comprendido entre las rectas tangentes y la gráfica de $f(x)$.

Gráficamente:



Por simetría el área pedido es el doble del área comprendido entre la recta $y = x$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$ entre las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Por lo tanto $A = 2\left|\int_0^{\pi/2} (x - \operatorname{sen} x)\, dx\right| =$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) = \boxed{\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) u^2}$$

Scanned by CamScanner

$\boxed{B}$

1) Dados $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de K para los que existe A^{-1}.

Sabemos que si $|A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$, entonces:

$$|A| = k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1.$$

Por lo tanto si $k \neq 1 \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{|A|} \mathrm{Adj}(A^t)$

Si $k = 2 \Rightarrow |A| = 1$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A^t$

La matriz de los adjuntos de A^t es: $\mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

y $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

b) Para $k = 2$ resolver $AX + B = AB \Rightarrow AX = AB - B \Rightarrow$

$\Rightarrow AX = (A - Id)B \Rightarrow X = A^{-1}(A - Id)B \Rightarrow$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

2) Dados $\pi \equiv ax + y - z + b = 0$ y $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

a) Hallar a y b tal que $r \subset \pi$.

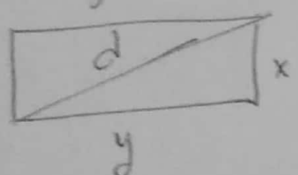
Si $r \subset \pi \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_r} \perp \vec{n_\pi} \Rightarrow (1,-1,1)\cdot(a,1,-1)=0 \Rightarrow \boxed{a=2} \\ P_r(1,2,3) \in \pi \Rightarrow 2+2-3+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-1} \end{cases}$

b) Hallar a y b tal que $r \perp \pi$:

$r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v_r} \parallel \vec{n_\pi} \Leftrightarrow (a,1,-1) = \lambda(1,-1,1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{a}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = -1 \Leftrightarrow \boxed{a=-1}$ $\forall b \in \mathbb{R}$

3) Hallar las dimensiones del rectángulo que hace mínima su diagonal, sabiendo que su perímetro es de 40 cm.



$2x + 2y = 40 \Rightarrow x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$

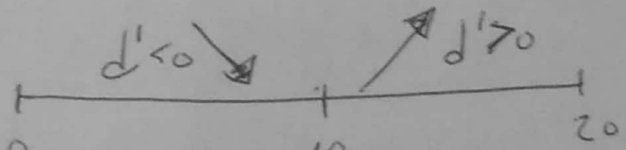
La función a minimizar es $d(x) = \sqrt{x^2 + (20-x)^2}$

Hallamos los puntos críticos, es decir, $d'(x) = 0 \Rightarrow$

$d'(x) = \left(\left[x^2 + (20-x)^2\right]^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(2x - 2(20-x)) =$

$= 2x - 20 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 10}$

Veamos si $d(x)$ alcanza un valor mínimo en $x=10$ estudiando el signo de la derivada $d'(x)$:



Por lo tanto $d(x)$ alcanza un mínimo en $x=10$ y dicho valor mínimo es $d(10) = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ cm.

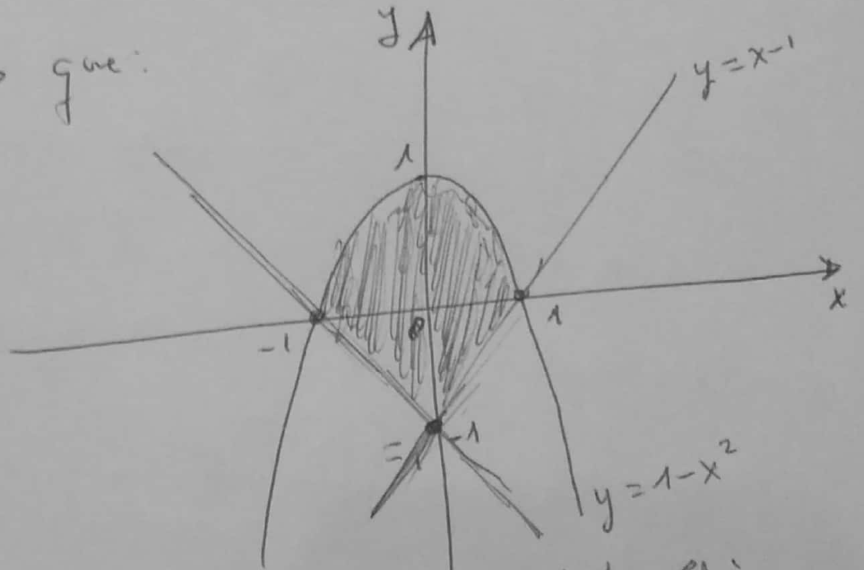
y se trata del cuadrado de lado 10 cm.

4

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x - \operatorname{sen} x}{e^x + \operatorname{sen} x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\frac{3e^x}{e^x}}^{\to 3} - \overbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{e^x}{e^x}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}}_{\to 0}} = \boxed{3}$$

b) Hallar el área del recinto limitado por $f(x) = |x| - 1$ y $g(x) = 1 - x^2$.

Como $f(x) = |x| - 1 = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x > 0 \\ -x - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ gráficamente tenemos que:



y por simetría, el área pedida es:

$$A = 2\left|\int_0^1 \left((1-x^2) - (x-1)\right) dx\right| = 2\int_0^1 (-x^2 - x + 2)\,dx =$$

$$= 2\left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = 2\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{7}{6} = \boxed{\frac{7}{3}\, u^2}.$$