


|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|  | <p align="center"><b>Pruebas de acceso a enseñanzas<br/>universitarias oficiales de grado<br/>Castilla y León</b></p> | <p align="center"><b>MATEMÁTICAS II</b></p> | <p align="center"><b>EJERCICIO</b><br/><br/>Nº Páginas: 2</p> |
|---|---|---|---|

**INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD:** El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

**2.- CALCULADORA:** Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

**CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:** Los 4 primeros ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2,25 puntos, y el quinto ejercicio sobre un máximo de 1 punto. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

**OPCIÓN A**

**E1.- a)** Sea  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ . Estudiar, en función del parámetro  $a$ , cuando  $M$  posee inversa. **(0,5 puntos)**

**b)** Siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ , calcular  $A^2$  y  $A^{-1}$ . **(1,75 puntos)**

**E2.- a)** Consideremos los puntos  $P(-1, -4, 0)$ ,  $Q(0, 1, 3)$ ,  $R(1, 0, 3)$ . Hallar el plano  $\pi$  que contiene a los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . **(1,25 puntos)**

**b)** Calcular  $a$  para que el punto  $S(3, a, 2)$ , pertenezca al plano  $\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$ . **(1 punto)**

**E3.- a)** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , calcular  $a$  para que  $f$  sea derivable en  $x = 0$ . **(1 punto)**

**b)** Hallar  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que la función  $f(x) = ax^2 + b \operatorname{sen} x + c$  verifique  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  y  $f''(0) = 2$ . **(1,25 puntos)**

**E4.- a)** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x}$ . **(1 punto)**

**b)** Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones  $f(x) = -x^2$ ,  $g(x) = x^2 - 2$ . **(1,25 puntos)**

**E5.-** De una bolsa con 2 bolas blancas, 2 negras y 2 amarillas se extraen dos sin devolución (es decir, una vez extraída una bola no se vuelve a poner en la bolsa). Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas. **(1 punto)**

## OPCIÓN B

**E1.- a)** Discutir según los valores del parámetro  $m$  el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \quad \text{(1,25 puntos)}$$

**b)** Resolverlo para  $m = 1$ . (1 punto)

**E2.- a)** Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(2,3,4)$  y es perpendicular al plano  $\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0$ . (1,25 puntos)

**b)** Calcular  $a$  para que las rectas  $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-2}{2}$ ,  $s \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{3}$  sean perpendiculares. (1 punto)

**E3.-** Consideremos la función  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$ . Calcular el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Esbozar su gráfica. (2,25 puntos)

**E4.- a)** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \operatorname{sen} x}{x^2}$ . (1,25 puntos)

**b)** Calcular  $\int \ln(x) dx$ . (1 punto)

**E5.-** Se tiran al aire, simultáneamente, un dado (con forma cúbica) y una moneda. Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado salga un 5 y de que en la moneda salga cara? (1 punto)

## OPCIÓN A

**E1.- a)** Sea  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ . Estudiar en función del parámetro  $a$ , cuando  $M$  posee inversa **(0,5 puntos)**

**b)** Siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ , calcular  $A^2$  y  $A^{-1}$  **(1 punto)**

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 6 \Rightarrow \text{Si } |M| = 0 \Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \{6\} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ 24 & 55 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 7 - 6 = 1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A' \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A' = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

**E2.- a)** Consideremos los puntos  $P(-1, -4, 0)$ ,  $Q(0, 1, 3)$ ,  $R(1, 0, 3)$ . Hallar el plano que contiene a  $P$ ,  $Q$  y  $R$  **(1,25 puntos)**

**b)** Calcular  $a$  para que el punto  $S(3, a, 2)$ , pertenezca al plano  $\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$  **(1 punto)**

a) Los vectores  $PQ$ ,  $PR$  y  $PG$ , donde  $G$  es el punto genérico del plano  $\pi$  que se busca son coplanarios y su producto mixto, que es la expresión del volumen del tetraedro que determinan, es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (0, 1, 3) - (-1, -4, 0) = (1, 5, 3) \\ \overrightarrow{PR} = (1, 0, 3) - (-1, -4, 0) = (2, 4, 3) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (-1, -4, 0) = (x+1, y+4, z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PG} \wedge |\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}| = \begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$15(x+1) + 6(y+4) + 4z - 10z - 12(x+1) - 3(y+4) = 0 \Rightarrow 3(x+1) + 3(y+4) - 6z = 0 \Rightarrow$$

$$(x+1) + (y+4) - 2z = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$$

b)

Se sustituyen las coordenadas del punto en la ecuación del plano  $\pi$

$$3 + a - 2 \cdot 2 + 5 = 0 \Rightarrow a - 4 + 8 = 0 \Rightarrow a + 4 = 0 \Rightarrow a = -4$$

**E3.- a)** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , calcular **a** para que **f** sea derivable en

**x = 0 (1 punto)**

b) Hallar **a**, **b** y **c** para que la función  $ax^2 + b \operatorname{sen} x + c$  verifique que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  y  $f''(0) = 2$  (1,25 puntos)

a) Para ser derivable una función en un punto tiene que ser, primeramente, continua en ese punto

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^2 + a \cdot 0 = 0 \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Es continua en } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + a & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2 \cdot 0 + a = 0 + a = a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} f'(x) = 2ax + b \cos x \\ f''(x) = 2a - b \operatorname{sen} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \operatorname{sen} 0 + c = 0 \Rightarrow 0 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f'(0) = 1 \Rightarrow 2a \cdot 0 + b \cos 0 = 1 \Rightarrow 0 + b \cdot 1 = 1 \Rightarrow b = 1 \\ f''(0) = 2 \Rightarrow 2a - 1 \cdot \operatorname{sen} 0 = 2 \Rightarrow 2a - 1 \cdot 0 = 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

**E4.- a)** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x}$  (1 punto)

b) Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones

$f(x) = -x^2$ ,  $g(x) = x^2 - 2$  (1,25 puntos)

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x} &= \frac{e^0 - e^{(0^2)}}{0} = \frac{1 - e^0}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2xe^{(x^2)}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} [e^x - 2xe^{(x^2)}] = \\ &= e^0 - 2 \cdot 0 \cdot e^{(0^2)} = 1 - 0 \cdot e^0 = 1 - 0 \cdot 1 = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

**Continuación del Ejercicio E4 en la opción A**

b)

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow -x^2 = x^2 - 2 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} \in (-1, 0) \Rightarrow \begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} < 0 \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{7}{4} < -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) > g(x)$$

$$\frac{1}{2} \in (0, 1) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} < 0 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{7}{4} < -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) > g(x)$$

$$f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x) \Rightarrow \text{Simétrica respecto a OY}$$

$$g(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = g(x) \Rightarrow \text{Simétrica respecto a OY}$$

$$S = 2 \left| \int_0^1 g(x) dx \right| - 2 \left| \int_0^1 f(x) dx \right| = 2 \left| \int_0^1 (x^2 - 2) dx \right| - 2 \left| \int_0^1 (-x^2) dx \right| = -2 \int_0^1 (x^2 - 2) dx + 2 \int_0^1 (-x^2) dx$$

$$S = \int_0^1 (-2x^2 + 4) dx - 2 \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (-4x^2 + 4) dx = -4 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 + 4 \cdot [x]_0^1 =$$

$$S = -\frac{4}{3} \cdot (1^3 - 0^3) + 4 \cdot (1 - 0) = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3} u^2$$

**E5.-** De una bolsa con 2 bolas blancas, 2 negras y 2 amarillas se extraen dos sin devolución (es decir, una vez extraída una bola no se vuelve a poner en la bolsa). Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas. **(1 punto)**

Sean B1 y B2 los sucesos extraer bola blanca la primera vez y extraer bola blanca la segunda vez. Son sucesos dependientes, pues al no devolver la bola cambia la composición para la segunda extracción.

Datos  $p(B1) = 2/6 = 1/3$  (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

Para calcular  $p(B2)$  se tiene en cuenta que la primera bola que ha salido es blanca y no se devuelve, por tanto sólo nos queda una bola blanca de un total de 5 bolas.

Me piden  $p(B1 \cap B2) = p(B1) \cdot p(B2/B1) = (2/6) \cdot (1/5) = 1/15 \cong 0'06667$ .

## OPCIÓN B

**E1.- a)** Discutir según los valores de  $m$  el sistema de ecuaciones lineales  $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$  (1,25 puntos)

**b)** Resolverlo para  $m = 1$  (1 punto)

a) Al tener **dos ecuaciones y tres incógnitas** el sistema **nunca podrá ser Compatible Determinado**, así que **solo se podrá resolver como Compatible Indeterminado y si no será Incompatible**

$$\begin{cases} mx + y = 1 - z \\ x + y = 1 - 2z \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 1$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

Cuando  $m = 1$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-z \\ 1 & 1 & 1-2z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-z \\ 0 & 0 & 0-z \end{array} \right) \Rightarrow -z = 0 \Rightarrow \text{Si } z = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 1$$

Sistema Compatible Indeterminado también cuando, además,  $z = 0$

Con  $m = 1$  y  $z \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 1 \neq \text{rang}(A/B) = 2 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

b)

Con  $z = 0$

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ x + y = 1 - 2z \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (1 - \lambda, \lambda, 0)$$

**E2.- a)** Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(2, 3, 4)$  y es perpendicular al plano  $\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0$  (1,25 puntos)

**b)** Calcular  $a$  para que las rectas  $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z - 2}{2}$ ,  $s \equiv \frac{x - 1}{a} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 2}{3}$  sean perpendiculares. (1 punto)

a) El vector director del plano  $\pi$  es el vector director de la recta  $t$  pedida, que con el punto  $P$  queda totalmente definida

$$\vec{v}_t = \vec{v}_\pi = (1, 1, 2) \Rightarrow t \equiv x - 2 = y - 3 = \frac{z - 4}{2}$$

b) Los vectores directores de las dos rectas son perpendiculares y su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ \vec{v}_s = (a, 2, 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (1, 1, 2) \cdot (a, 2, 3) = 0 \Rightarrow a + 2 + 6 = 0 \Rightarrow a = -8$$



**E.3.-** Consideremos la función  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$ . Calcular el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Esbozar su gráfica **(2,25 puntos)**

$$x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-2} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathfrak{R}$$

No hay asíntotas verticales

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal,  $y=1$ , cuando  $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal,  $y=1$ , cuando  $x \rightarrow -\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^3+2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow \infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^3+2x} = \frac{\infty}{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{-\infty} + \frac{1}{-\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+2) - 2x(x^2+1)}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^3+4x-2x^3-2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x}{(x^2+2)^2} \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ x > 0 \\ (x^2+2)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

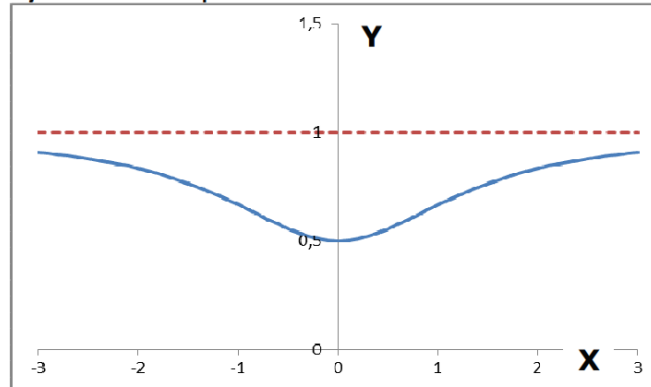
|                 |           |     |          |
|-----------------|-----------|-----|----------|
|                 | $-\infty$ | $0$ | $\infty$ |
| $2 > 0$         | (+)       | (+) | (+)      |
| $x > 0$         | (-)       | (+) | (+)      |
| $(x^2+2)^2 > 0$ | (+)       | (+) | (+)      |
| <b>Solución</b> | (-)       | (+) | (+)      |

**Creciente**  $\forall x \in \mathfrak{R} / x > 0$

**Decreciente**  $\forall x \in \mathfrak{R} / x < 0$

**Mínimo relativo en**  $x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2+1}{0^2+2} = \frac{1}{2}$  **de decreciente pasa a creciente**

Continuación del Ejercicio E3 en la opción B



E4.- a) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \text{sen } x}{x^2}$  (1,25 puntos)

b) Calcular  $\int \ln x \, dx$ . (1 punto)

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \text{sen } x}{x^2} &= \frac{0 \cdot e^0 - \text{sen } 0}{0^2} = \frac{0 \cdot 1 - 0}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x - \cos x}{2x} = \frac{e^0 + 0 \cdot e^0 - \cos 0}{2 \cdot 0} = \\ &= \frac{1 + 0 \cdot 1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^x + xe^x - (-\text{sen } x)}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + xe^x + \text{sen } x}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(2+x) + \text{sen } x}{2} = \frac{e^0(2+0) + \text{sen } 0}{2} = \frac{1 \cdot 2 + 0}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

b)

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1) + K$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln x = u \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dx = dv \Rightarrow x = \int dx = x \end{array} \right.$$

E5.- Se tiran al aire, simultáneamente, un dado (con forma cúbica) y una moneda. Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado salga un 5 y de que en la moneda salga cara? (1 punto)

Al ser los experimentos independientes la probabilidad del producto es el producto de las probabilidades.

Sabemos que el número de casos posibles del espacio muestral E al lanzar dos dados es  $6 \times 6 = 36$  (6 veces de cada dado).

Sea el suceso A = "la suma de las puntuaciones obtenidas sea igual a 5" = {1-4; 4-1; 2-3; 3-2}. Vemos que sólo hay cuatro casos favorables.

$$p(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ casos favorables a que ocurra A}}{\text{n}^\circ \text{ casos posibles de E}} = \frac{4}{36} = 1/9.$$

Sea B el suceso lanzar una moneda y que salga cara,  $p(B) = \frac{\text{n}^\circ \text{ casos favorables a que ocurra B}}{\text{n}^\circ \text{ casos posibles de E}} = 1/2.$

Me piden  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = (1/9) \cdot (1/2) = 1/18 \cong 0'05556$