- 1	**Pruebas de Acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado** **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº páginas: 2**

INDICACIONES: **1.- OPTATIVIDAD**: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada ejercicio se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1. Consideremos el sistema $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ (a+3)y=0 \\ (a+2)z=1 \end{cases}$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.
b) Resolverlo cuando sea posible.

2. Sean las rectas $r \equiv x=y=z$ y $s \equiv \begin{cases} x-y=1 \\ x-3z=1 \end{cases}$.

a) Comprobar que las rectas r y s se cruzan.
b) Calcular la recta que corta perpendicularmente a las rectas r y s.

3. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Calcular dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

4. a) Enunciar e interpretar geométricamente el Teorema de Rolle.
b) Hallar la primitiva de la función $f(x)=x^2 \ln x$ cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

OPCIÓN B

1. Consideremos la matriz $M = \begin{pmatrix} a(a-4) & a-4 \\ a-4 & a(a-4) \end{pmatrix}$.

a) Calcular el rango de M en función del parámetro a.

b) Para $a = 1$, resolver la ecuación $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2. a) Determinar la ecuación del plano que es perpendicular al segmento de extremos $A = (0, -1, 3)$ y $B = (2, -1, 1)$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

b) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los cortes del plano $2x + y + 2z = 0$ con los ejes coordenados.

3. Consideremos la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si} \quad x \le 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

Hallar los valores de a, b y c para que $f(x)$ sea continua en toda la recta real y tenga un extremo relativo en el punto $(1, -1)$.

4. a) Calcular $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

b) Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Consideremos el sistema $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ (a+3)y=0 \\ (a+2)z=1 \end{cases}$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.
b) Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

a) Consideremos las matrices de los coeficientes, A, y la matriz ampliada, $\overline{A}$, del sistema:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a+3 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 \end{array}\right)$$

Veamos cual es el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a+3 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix}=(a+3)\,(a+2)$$

Dicho determinante se anula para:

$$(a+3)\,(a+2)=0 \quad \Rightarrow \quad a=-3 \;\text{ y }\; a=-2$$

Por tanto, tenemos que:

- Si $a\neq -3$ y $a\neq -2$ $\Rightarrow$ rango (A) = 3 = rango ($\overline{A}$) = nº incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Tiene solución única.

- Si $a=-3$ $\Rightarrow$ Las matrices que tenemos son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

En ambas matrices podemos prescindir de la segunda fila pues todos sus elementos son nulos, y por tanto, se deduce que rango (A) = rango ($\overline{A}$) = 2, ya que en dichas matrices es posible encontrar un menor de orden dos no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Entonces, como rango (A) = rango ($\overline{A}$) = 2 < 3 = nº incógnitas, el sistema es Compatible Indeterminado. Tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

- Si $a = -2$ $\Rightarrow$ Las matrices que tenemos son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora tenemos que rango (A) = 2, ya que en dicha matriz se puede prescindir de la última fila, por ser todos sus elementos nulos, y es posible encontrar un menor de orden dos no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Sin embargo, rango ($\overline{A}$) = 3, ya que orlando el menor anterior con la columna de los términos independientes obtenemos un menor de orden tres no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por tanto, rango (A) = 2 ≠ 3 = rango ($\overline{A}$) el sistema es Incompatible. No tiene solución.

b) Resolvamos en primer lugar el sistema si $a \neq -3$ y $a \neq -2$. Para hallar su única solución, despejamos z de la última ecuación y la y de la segunda, y sustituimos ambos valores en la primera, para luego despejar la x.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ (a+3)y = 0 \\ (a+2)z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{a+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4a+5}{a+2} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{a+2} \end{cases} \quad (a \neq -3 \text{ y } a \neq -2)$$

Resolvamos ahora el sistema si $a = -3$. En este caso, el sistema equivalente que nos queda, eliminando la segunda ecuación, es:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -z = 1 \end{cases}$$

Tomando como parámetro la incógnita y ($y = \lambda$), despejando z de la última ecuación y x de la primera, obtenemos las infinitas soluciones que tiene el sistema:

$$\begin{cases} x = 7 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Sean las rectas $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 3z = 1 \end{cases}$.

a) Comprobar que las rectas r y s se cruzan.
b) Calcular la recta que corta perpendicularmente a las rectas r y s.

Solución:

a) Una forma de resolver este apartado es estudiar el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones implícitas de las dos rectas r y s. Estas son:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 3z = 1 \end{cases}$$

El sistema formado por las cuatro ecuaciones es:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 1 \\ x - 3z = 1 \end{cases}$$

Como puede verse es imposible que las ecuaciones primera ($x - y = 0$) y tercera ($x - y = 1$) se cumplan simultáneamente, lo cual hace que el sistema sea incompatible, esto es, no tenga solución, lo cual nos indica que las dos rectas no tienen ningún punto en común. Además, si nos fijamos en los vectores directores de las mimas, $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (3, 3, 1)$, se observa que no son paralelas, no están contenidas en el mismo plano, luego se cruzan.

Otra forma de probar que las rectas se cruzan, es estudiar si los vectores directores de las rectas r y s, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y un vector que una un punto de r, R, con un punto de s, S, son linealmente independientes, es decir forman una base de $\mathbb{R}^3$. A partir de las ecuaciones de las rectas podemos obtener un punto y un vector director de cada una de ellas:

$$r \equiv x = y = z \quad \overset{z=\lambda}{\Rightarrow} \quad r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Punto:} R(0,0,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,1,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 3z = 1 \end{cases} \quad \overset{z=\mu}{\Rightarrow} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = 3\mu \\ z = \mu \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Punto:} S(1,0,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (3,3,1) \end{cases}$$

Entonces:

$$\overrightarrow{RS} = (1, 0, 0)$$

Probemos si estos tres vectores, $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{RS}$, son linealmente independientes. Para ello, el determinante formado por los tres ha de ser no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0$$

b) Un procedimiento para calcular la perpendicular común podría ser el siguiente:

1. Hallamos el plano π_r que contiene a la recta r y al vector $\vec{w}$ que es perpendicular a r y s ($\vec{w}$ es el producto vectorial de $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$)
2. Hallamos el plano π_s que contiene a la recta s y al vector $\vec{w}$ anterior.
3. La recta perpendicular común es la intersección de los planos π_r y π_s.

1. Calculemos $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = (-2, 2, 0)$$

El plano π_r vendrá dado por $\pi_r \equiv (R, \overrightarrow{v_r}, \vec{w})$:

$$\pi_r \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2x - 2y + 4z = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y - 2z = 0$$

2. De igual modo, el plano π_s vendrá dado por $\pi_s \equiv (S, \overrightarrow{v_s}, \vec{w})$:

$$\pi_s \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\,(x-1) - 2y + 12z = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y - 6z - 1 = 0$$

3. La perpendicular común es la intersección de los dos planos anteriores:

$$p \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + y - 6z - 1 = 0 \end{cases}$$

Otro procedimiento para resolver el problema, aunque más largo y con más cálculos sería este. En primer lugar, tengamos en cuenta que cualquier recta que se apoya en r y en s, tiene como vector director la diferencia entre los vectores de posición de dos puntos genéricos de las rectas. Como la recta buscada es la perpendicular común el producto escalar de este vector con el de cada uno de las rectas dadas, *r* y *s*, ha de ser nulo.

Entonces, para calcular la perpendicular común podemos seguir el siguiente procedimiento:

1. Calculamos la ecuaciones parámetricas de las rectas *r* y *s* (a partir de las cuales podemos obtener el vector director y un punto de cada una de ellas)
2. Con las coordenadas genéricas de dos puntos de *r* y *s* obtenidas en el paso anterior podemos calcular un vector que una un punto genérico de *r* con un punto genérico de *s*.
3. Dicho vector ha de ser perpendicular simultáneamente a los vectores directores de *r* y *s*. De aquí deduciremos cuánto valen los parámetros necesarios para determinar los puntos buscados.
4. Calculamos la recta que pasa por los puntos obtenidos en el apartado anterior.

Procedamos pues:

1. Ecuaciones paramétricas de las rectas *r* y *s*:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = 3\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

2. Un punto genérico de la recta *r* será $R = (\lambda, \lambda, \lambda)$. Un punto genérico de la recta *s* será $S = (1 + 3\mu, 3\mu, \mu)$. El vector determinado por estos puntos es:

$$\overrightarrow{RS} = (1 + 3\mu - \lambda, 3\mu - \lambda, \mu - \lambda)$$

3. Imponemos la condición de que el vector $\overrightarrow{RS}$ sea perpendicular simultáneamente a los vectores directores de *r* y *s*, que son $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (3, 3, 1)$. Así:

$$\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 + 3\mu - \lambda, 3\mu - \lambda, \mu - \lambda) \cdot (1, 1, 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 7\mu - 3\lambda + 1 = 0$$
$$\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 + 3\mu - \lambda, 3\mu - \lambda, \mu - \lambda) \cdot (3, 3, 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 19\mu - 7\lambda + 3 = 0$$

Si resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (λ y μ) que hemos obtenido, se llega a que $\lambda = -\frac{1}{4}$ y $\mu = -\frac{1}{4}$. Por tanto, los puntos *R* y *S* en los que la perpendicular común corta a las rectas *r* y *s*, respectivamente, son $R = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ y $S = \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

4. Calculemos finalmente la perpendicular común, *p*, que será la recta que pase por los puntos *R* y *S*. Dicha recta estará determinada por un punto (por ejemplo $R = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$) y el vector director $\overrightarrow{RS}$ de coordenadas $\overrightarrow{RS} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \approx (1, -1, 0)$. Así:

$$p \equiv \frac{x + \frac{1}{4}}{1} = \frac{y + \frac{1}{4}}{-1} = \frac{z + \frac{1}{4}}{0} \quad \text{o} \quad p \equiv \frac{4x + 1}{4} = \frac{4y + 1}{-4} = \frac{4z + 1}{0}$$

3. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Calcular dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

Solución:

El dominio de la función f es $\mathbb{R}$, pues se trata de una función racional para la que el denominador no se anula nunca.

$$Dom\, f = \mathbb{R}$$

Estudiemos ahora sus asíntotas:

- Verticales: No existen pues $Dom\, f = \mathbb{R}$.

- Horizontales:

  $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$ (por ser el grado del numerador igual al grado del denominador)

  Por tanto, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de f cuando $x \to \pm\infty$.

- Oblicuas: Como hay un asíntotas horizontales cuando $x \to \pm\infty$, ya no puede haber asíntotas oblicuas, pues son excluyentes.

Estudiemos a continuación la monotonía de $f(x)$. Para ello, calculemos su derivada, $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Los puntos singulares se presentan en los puntos solución de la ecuación $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Representemos este punto singular sobre la recta real y veamos el signo que toma $f'(x)$ en cada uno de los intervalos en que queda dividida:

$f'(x) < 0$ | $f'(x) > 0$

0

Por tanto, la función f decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

De lo anterior se deduce que en el punto de abscisa $x = 0$ se presenta un mínimo relativo de la función f, pues en él la monotonía cambia de decreciente a creciente.

Mínimo relativo en $(0, -1)$

A dicha conclusión se puede llegar también a través del estudio de la derivada segunda:

$$f``(x) = \frac{4(x^2+1)^2 - 4x\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4(x^2+1) - 4x\cdot 2\cdot 2x}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}$$

Como:

$$f``(0) = 4 > 0 \;\Rightarrow\; \text{Mínimo en } (0, -1)$$

Estudiemos ahora la curvatura a través de la derivada segunda. Los puntos de inflexión, si los hay, se presentan en los puntos solución de la ecuación $f``(x) = 0$.

$$f``(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad -12x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

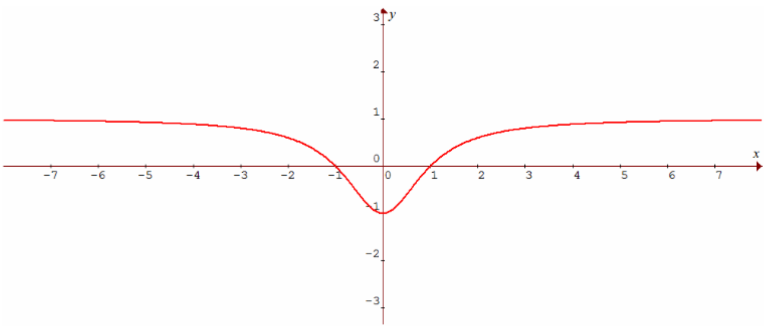
Representemos dichos puntos sobre la recta real y veamos el signo que toma $f``(x)$ en cada uno de los intervalos en que queda dividida:

$$\begin{array}{ccccc} f``(x) < 0 & | & f``(x) > 0 & | & f``(x) < 0 \\ & -\frac{\sqrt{3}}{3} & & \frac{\sqrt{3}}{3} & \end{array}$$

Por tanto, la función f es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{,+\infty\sqrt{3}}{3}\right)$ y cóncava hacia arriba en crece en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. De los anterior se deduce que en el punto de abscisas $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ hay un punto de inflexión, pues la curvatura cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba. De igual modo en el punto de abscisa $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ hay otro punto de inflexión pues la curvatura cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo. Así pues los puntos de inflexión son:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right) \;\text{ y }\; \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$$

Aunque no la piden, la gráfica de la función $f(x)$ es:



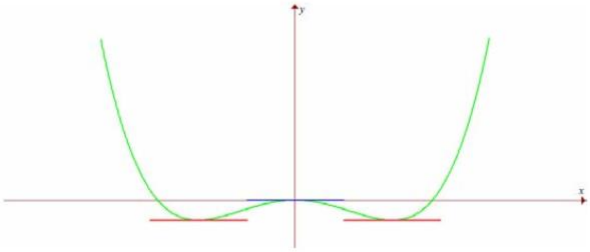
4. a) Enunciar e interpretar geométricamente el Teorema de Rolle.
b) Hallar la primitiva de la función $f(x) = x^2 \ln x$ cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

Solución:

a) El enunciado del Teorema de Rolle es:

> Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, es derivable en el intervalo abierto (a, b), y $f(a) = f(b)$, entonces, existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Geométricamente el teorema nos indica que, en estas condiciones, existe al menos un punto de la gráfica de la función en que la tangente a la curva es paralela al eje de abscisas.



b) Calculemos la integral indefinida, $F(x)$, de la función dada, $f(x) = x^2 \ln x$.

$$F(x) = \int (x^2 \ln x)\, dx$$

Resolvamos la integral por partes:

$$\ln x = u \;\Rightarrow\; \frac{1}{x}\, dx = du$$

$$x^2\, dx = dv \;\Rightarrow\; v = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

Entonces:

$$\int (x^2 \ln x)\, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

Buscamos una primitiva que pase por el punto (1, 0), esto es, $F(1) = 0$.

$$F(1) = \frac{1^3 \ln 1}{3} - \frac{1^3}{9} + C = -\frac{1}{9} + C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{9}$$

Por tanto la primitiva en cuestión es:

$$F(x) = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}$$

OPCIÓN B

1. Consideremos la matriz $M = \begin{pmatrix} a(a-4) & a-4 \\ a-4 & a(a-4) \end{pmatrix}$.

a) Calcular el rango de M en función del parámetro a.

b) Para $a = 1$, resolver la ecuación $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Para estudiar el rango de M, calculemos su determinante, $|M|$:

$$|M| = \begin{vmatrix} a(a-4) & a-4 \\ a-4 & a(a-4) \end{vmatrix} = a^2 (a-4)^2 - (a-4)^2 = (a-4)^2 (a^2 - 1)$$

Dicho determinante se anula para los siguientes valores de a:

$$|M| = 0 \quad \Rightarrow \quad (a-4)^2 (a^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1 \quad \text{y} \quad a = 4 \text{ (doble)}$$

Por tanto:

- Si $a = -1 \quad \Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \overset{f_2 = -f_1}{\Rightarrow}$ rango $(M) = 1$
- Si $a = 1 \quad \Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \overset{f_2 = f_1}{\Rightarrow}$ rango $(M) = 1$
- Si $a = 4 \quad \Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $(M) = 0$
- Si a toma valores distintos de -1, 1 y 4 $\Rightarrow$ rango $(M) = 2$

b) Para $a = 1$ la matriz M es:

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el sistema que tenemos es:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3x - 3y = -6x \\ -3x - 3y = -6y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases}$$

Se observa que la segunda ecuación es proporcional a la primera ($f_2 = -f_1$), y por tanto se puede eliminar a la hora de resolver el sistema. El sistema equivalente que nos queda tiene una sola ecuación con dos incógnitas, esto es, es compatible indeterminado, y por tanto tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Si tomamos y cómo parámetro ($y = \lambda$) dichas soluciones son:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases} \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. a) Determinar la ecuación del plano que es perpendicular al segmento de extremos $A = (0, -1, 3)$ y $B = (2, -1, 1)$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento.
b) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los cortes del plano $2x + y + 2z = 0$ con los ejes coordenados.

Solución:

a) Como el plano buscado,π, es perpendicular la segmento de extremos A y B, su vector característico, $\vec{p}$, es precisamente el vector $\overrightarrow{AB}$. Dicho vector es:

$$\vec{p} = \overrightarrow{AB} = (2, 0, -2)$$

Por tanto, la forma de la ecuación del plano π es:

$$2x - 2z + D = 0$$

Para calcular el coeficiente D, imponemos la condición de que dicho plano pase por el punto medio del segmento de extremos A y B, M:

$$M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{(-1)+(-1)}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (1, -1, 2)$$

Por tanto, como $M \in \pi$:

$$2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 2$$

Así pues, la ecuación del plano buscado π es:

$$\pi \equiv 2x - 2z + 2 = 0 \quad \text{ó} \quad \pi \equiv x - z + 1 = 0$$

b) Calculemos en primer lugar los puntos de corte del plano dado, $2x + y + 2z - 2 = 0$, con los ejes de coordenadas. Para ello, tengamos en cuenta las ecuaciones de los mismos:

$$\text{Eje } X \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{Eje } Y \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{Eje } Z \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Así pues, los puntos de intersección buscados son:

$$X = (1, 0, 0) \quad ; \quad Y = (0, 2, 0) \quad ; \quad Z = (0, 0, 1)$$

Tengamos en cuenta ahora que el área del triángulo de vértices X, Y y Z viene dada por la mitad del producto vectorial, en valor absoluto, de los vectores que forman los lados del triángulo, teniendo un origen común:

$$Área = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{XY} \wedge \overrightarrow{XZ}\right|$$

Como:

$$\overrightarrow{XY} = (-1, 2, 0) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{XZ} = (-1, 0, 1)$$

tenemos que:

$$Área = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{XY} \wedge \overrightarrow{XZ}\right| = Área = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\ |\ 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\ | = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9} = \frac{3}{2}\ u^2$$

3. Consideremos la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si} \quad x \le 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

Hallar los valores de a, b y c para que $f(x)$ sea continua en toda la recta real y tenga un extremo relativo en el punto $(1, -1)$.

Solución:

En primer lugar tengamos en cuenta que las funciones parciales son continuas en los intervalos donde están definidas. Pero además, la función ha de ser continua en el punto donde se cambia de una a otra, es decir, en $x = 2$. Estudiemos dicho punto:

$$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$$

$$\lim_{x \to 2^-}(ax^2 + bx + c) = 4a + 2b + c$$

$$\lim_{x \to 2^+}\ln(x-1) = \ln 1 = 0$$

Para que exista el límite, los límites laterales han de ser iguales y por tanto:

$$4a + 2b + c = 0 \qquad (1)$$

Por otra parte, la función $f(x)$ ha de tener un extremo relativo en el punto $(1, -1)$. De aquí se deducen dos cosas:

- $f(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -1 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = -1 \qquad (2)$

- $f'(1) = 0 \;\Rightarrow\;$ (Si $x < 2$: $f'(x) = 2ax + b$) $\;2a \cdot 1 + b = 0 \;\Rightarrow\; 2a + b = 0$ (3)

De las relaciones (1), (2) y (3) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = -1 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

Resolviéndolo resulta que:

$$a = 1 \quad ; \quad b = -2 \quad ; \quad c = 0$$

Por tanto la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x \le 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

4. a) Calcular $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

b) Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Solución:

a) Si intentamos calcular directamente el límite:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} = (\cos 0)^{\frac{1}{0^2}} = 1^{\infty}$$

se obtiene una indeterminación del tipo 1^{∞}. Resolvámosla:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}(\cos x - 1)}$$

El límite que aparece ahora es otra indeterminación, pero es del tipo $\dfrac{0}{0}$, y la podemos resolver aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}(\cos x - 1) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \xrightarrow{\text{L'Hopital}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x} = \xrightarrow{\text{L'Hopital}} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

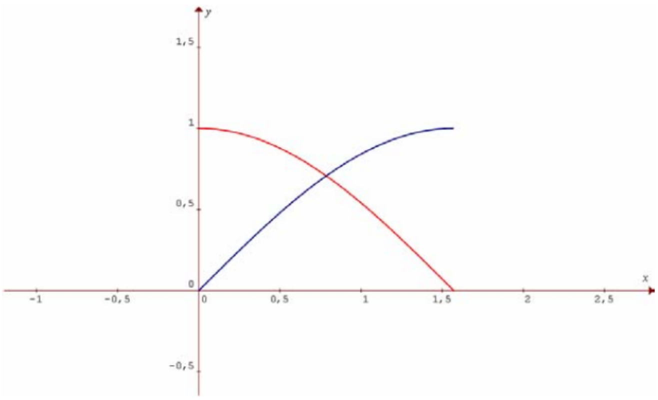
Por tanto, el límite pedido es:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\cos x-1)} = e^{-\frac{1}{2}}$$

b) En primer lugar, calculemos los puntos de corte de las funciones $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Para ello, resolvamos la ecuación:

$$\cos x = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$$

Se puede comprobar fácilmente que en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ la función $\cos x$ va por encima de la función $\operatorname{sen} x$ y en el intervalo $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ ocurre lo contrario. La representación gráfica de esta situación es:



$\cos x$ en rojo y $\operatorname{sen} x$ en azul

Por tanto, el área pedida vendrá dada por:

$$\acute{A}rea = \int_0^{\pi/4}(\cos x - \operatorname{sen} x)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2}(\operatorname{sen} x - \cos x)dx =$$

$$= [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= \left[\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - (\operatorname{sen} 0 + \cos 0)\right] + \left[\left(-\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+1)\right] + \left[(0-1) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = 2\sqrt{2} - 2 \quad u^2$$