	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 2**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada ejercicio se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- a) Resolver la siguiente ecuación matricial $X \cdot A = B - C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **(1,5 puntos)**

b) Sean F_1, F_2 y F_3 las filas de una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcular razonadamente el valor del determinante de la matriz cuyas filas son respectivamente $3F_1 - F_3, F_2$, y $2F_3$. **(1 punto)**

E2.- Sea el punto $A(1,1,3)$ y la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.

a) Calcular el plano perpendicular a la recta r que pase por A. **(1 punto)**

b) Calcular la distancia del punto A a la recta r. **(1,5 puntos)**

E3.- Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica. **(2,5 puntos)**

E4.- a) Hallar el punto en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x + 4$ es paralela a la recta de ecuación $y = 5x - 7$. **(1 punto)**

b) Calcular el área delimitada por la parábola de ecuación $y = 2x^2$ y la recta $y = 2x + 4$. **(1,5 puntos)**

OPCIÓN B

E1.- Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + my = 1 - 2m \end{cases}$.

a) Discutir el sistema según los valores de m. **(1,5 puntos)**

b) Hallar los valores de m para los que el sistema tenga alguna solución en la que $x = 2$. **(1 punto)**

E2.- a) Dados el punto $A(3,5,1)$, la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y + 2 = z + 1$ y el plano $\pi \equiv 3x - 2y + z + 5 = 0$, determinar el punto B de π tal que la recta AB sea paralela a la recta r. **(1,5 puntos)**

b) Hallar las coordenadas de un vector de módulo 1 que sea perpendicular a los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, siendo $P(1,3,-1)$, $Q(2,0,1)$ y $R(-1,1,0)$. **(1 punto)**

E3.- Se desea construir un depósito de chapa (en forma de prisma recto, abierto y de base cuadrada) con una capacidad de 32.000 litros. ¿Cuáles han de ser las dimensiones del depósito para que se precise la menor cantidad de chapa posible en su construcción? **(2,5 puntos)**

E4.- a) Enunciar e interpretar geométricamente el Teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Hallar la primitiva de $f(x) = x^2 \ln x$ cuya gráfica pasa por el punto $(1,2)$. **(1,5 puntos)**

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. a) Resolver la siguiente ecuación matricial $X \cdot A = B - C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Sean F_1, F_2 y F_3 las filas de una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcular razonadamente el valor del determinante de la matriz cuyas filas son respectivamente $3F_1 - F_3$, F_2 y $2F_3$.

Solución:

a) En primer lugar despejemos la matriz X de la ecuación matricial dada, $X \cdot A = B - C$:

$$X \cdot A = B - C \quad \Rightarrow \quad X = (B - C) \cdot A^{-1}$$

Calculemos pues las matrices $B - C$ y A^{-1}:

$$B - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, para que exista A^{-1}, se debe cumplir que el determinante de la matriz A sea no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0$$

Como la matriz A^{-1} existe, esta vendrá dada por:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

siendo $Adj\ (A^t)$ la matriz adjunta de la transpuesta de A. Calculémosla:

$$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Adj\ (A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$X = (B - C) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -14 & 24 \end{pmatrix}$$

b) Repasemos en primer lugar algunas propiedades de los determinantes:

(1) Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se descomponen es dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en

esa fila o columna el primero y segundo sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.

(2) Si se multiplican todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

(3) Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales o proporcionales, su determinante es cero.

Utilizando las propiedades anteriores, calculemos el valor del determinante de la matriz cuyas filas son respectivamente $3\,F_1 - F_3$, F_2 y $2F_3$:

$$det\,(3\,F_1 - F_3, F_2, 2F_3) \overset{(1)}{=} det\,(3\,F_1, F_2, 2F_3) - det\,(F_3, F_2, 2F_3) \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} 3 \cdot 2 \cdot det\,(F_1, F_2, F_3) - 2 \cdot det\,(F_3, F_2, F_3) \overset{(3)}{=} 6 \cdot det\,(F_1, F_2, F_3) + 0 = 6 \cdot 5 = 30$$

2. Sea el punto $A(1, 1, 3)$ y la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.
   a) Calcular el plano perpendicular a la recta r que pasa por A.
   b) Calcular la distancia del punto A a la recta r.

Solución:

a) Para determinar el plano π perpendicular a la recta r que pase por A, tengamos en cuenta que el vector director de la recta r, $\overrightarrow{v_r}$, coincide con el vector característico, $\vec{p}$, del plano π buscado. Escribamos las ecuaciones paramétricas de la recta r, tomando $y = \lambda$, para conocer cual es su vector director:

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v_r} = (1, 1, 0) = \vec{p}$$

El plano buscado π tendrá entonces por ecuación:

$$x + y + D = 0$$

Para calcular el coeficiente D, imponemos la condición de que dicho plano ha de pasar por el punto A dado, y por tanto sus coordenadas verifican la ecuación del plano:

$$A \in \pi \quad \Rightarrow \quad 1 + 1 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -2$$

Así, la ecuación del plano π pedido es:

$$x + y - 2 = 0$$

b) Una forma de calcular la distancia del punto A a la recta r sería usando la fórmula:

$$d\,(A,r) = \frac{|\overrightarrow{RA} \wedge \overrightarrow{v_r}|}{|\overrightarrow{v_r}|}$$

siendo $\overrightarrow{RA}$ un vector que una el punto A con un punto cualquiera R de la recta r, $\overrightarrow{v_r}$ el vector director de la recta r y $|\overrightarrow{RA} \times \overrightarrow{v_r}|$ es el módulo del producto escalar de ambos.

A partir de las ecuaciones paramétricas de la recta r calculadas en el apartado anterior, tenemos que un punto R de dicha recta es:

$$R(-2,\,0,\,2)$$

Por tanto:

$$\overrightarrow{RA} = (3,\,1,\,1)$$

Entonces:

$$d\,(A,r) = \frac{|\overrightarrow{RA} \wedge \overrightarrow{v_r}|}{|\overrightarrow{v_r}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|(1,1,0)|} = \frac{|-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\,|}{|(1,1,0)|} = \frac{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}\ \ u$$

Otra forma de calcular dicha distancia, si es que no recuerdas la fórmula anterior, sería calculando en primer lugar el punto de intersección, P, de la recta r con un plano perpendicular a la misma que pasase por A, que por otra parte hemos calculado en el apartado anterior. La distancia de A a la recta r, coincide con la distancia de A al punto P.

Para calcular P, sustituyamos las coordenadas de un punto genérico de la recta r en la ecuación del plano π:

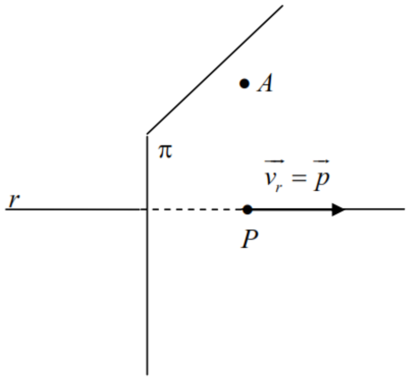
$$P \equiv r \cap \pi \quad \Rightarrow \quad -2+\lambda+\lambda-2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$$

Por tanto:

$$P(0,\,2,\,2)$$

Entonces:

$$d\,(A,r) = d\,(A,P) = \sqrt{(0-1)^2+(2-1)^2+(2-3)^2} = \sqrt{3}\ \ u$$



3. Sea la función $f(x) = x^2\, e^{-x}$. Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.

Solución:

a) El dominio de definición de la función dada es: *Dom* $f = \mathbb{R}$. Estudiemos en primer lugar la monotonía de $f(x)$. Para ello, calculemos su derivada, $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x\, e^{-x} - x^2\, e^{-x} = (2x - x^2)\, e^{-x}$$

Los puntos singulares se presentan en los puntos solución de la ecuación $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x - x^2)\, e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ y } \ x = 2$$

Representemos estos puntos singulares sobre la recta real y veamos el signo que toma $f'(x)$ en cada uno de los intervalos en que queda dividida:

$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$	2	$f'(x) < 0$

Por tanto, la función f decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

De lo anterior se deduce que en el punto de abscisa $x = 0$ se presenta un mínimo relativo de la función f, pues en él la monotonía cambia de decreciente a creciente. También se deduce que en el punto de abscisa $x = 2$ la función presenta un máximo relativo, pues en él la función f pasa de ser creciente a ser decreciente.

Mínimo relativo en $(0, 0)$ y Máximo relativo en $(2, 4e^{-2})$

A dicha conclusión se puede llegar también a través del estudio de la derivada segunda:

$$f''(x) = (2 - 2x)\, e^{-x} - (2x - x^2)\, e^{-x} = (2 - 4x + x^2)\, e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''(0) = 2 > 0 \ \Rightarrow \ \text{Mínimo} \\ f''(2) = -2\, e^{-2} < 0 \ \Rightarrow \ \text{Máximo} \end{cases}$$

Estudiemos ahora la curvatura a través de la derivada segunda. Los puntos de inflexión, si los hay, se presentan en los puntos solución de la ecuación $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (2 - 4x + x^2)\, e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - 4x + x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{2}$$

Representemos dichos puntos sobre la recta real y veamos el signo que toma $f''(x)$ en cada uno de los intervalos en que queda dividida:

$f''(x) > 0$	$2 - \sqrt{2}$	$f''(x) < 0$	$2 + \sqrt{2}$	$f''(x) > 0$

Por tanto, la función f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en crece en $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$.

De lo anterior se deduce que en el punto de abscisa $x = 2 - \sqrt{2}$ se presenta un punto de inflexión de la función f, pues en él la curvatura cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo. También se deduce que en el punto de abscisa $x = 2 + \sqrt{2}$ la función presenta otro punto de inflexión pues en él la curvatura cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Puntos de inflexión en $\left(2-\sqrt{2}, \left(6-4\sqrt{2}\right)e^{-\left(2-\sqrt{2}\right)}\right)$ y $\left(2+\sqrt{2}, \left(6+4\sqrt{2}\right)e^{-\left(2+\sqrt{2}\right)}\right)$

Estudiemos ahora las asíntotas de la función:

- Verticales: No existen pues $Dom\, f = \mathbb{R}$.
- Horizontales:

  Veamos en primer lugar qué pasa si $x \to -\infty$.

$$\underset{x\to-\infty}{Lim}\, x^2\cdot e^{-x} = \underset{x\to+\infty}{Lim}(-x)^2\cdot e^{-(-x)} = \underset{x\to+\infty}{Lim}\, x^2\cdot e^{x} = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

  Por tanto no existe asíntota horizontal si $x \to -\infty$.

  Veamos ahora qué pasa si $x \to +\infty$.

$$\underset{x\to+\infty}{Lim}\, x^2\cdot e^{-x} = \underset{x\to+\infty}{Lim}\frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

  Aplicando la regla de L´Hopital, se tiene que:

$$\underset{x\to+\infty}{Lim}\frac{x^2}{e^x} = \xrightarrow{L'Hopital} = \underset{x\to+\infty}{Lim}\frac{2x}{e^x} = \xrightarrow{L'Hopital} = \underset{x\to+\infty}{Lim}\frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0 = 0$$

  Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de f cuando $x \to +\infty$.

- Oblicuas: Como hay un asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$, ya no puede haber oblicuas cuando $x \to +\infty$, pues son excluyentes. Veamos que pasa si $x \to -\infty$. Si existiese asíntota oblicua ésta tendría por ecuación $y = mx + n$, donde m y n son los siguientes límites, que deben existir y ser finitos:

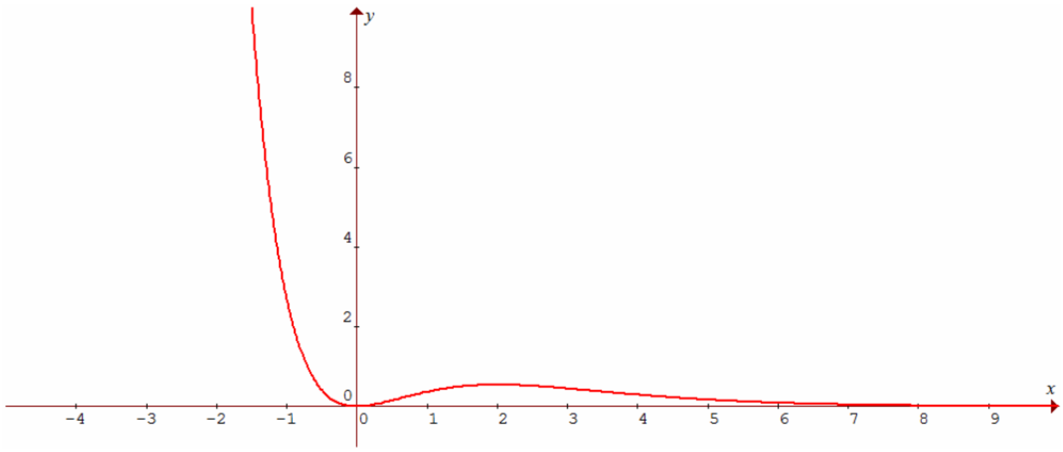
$$m = \underset{x\to-\infty}{Lim}\frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \underset{x\to-\infty}{Lim}\,(f(x) - mx)$$

  Calculémoslos:

$$m = \underset{x\to-\infty}{Lim}\frac{x^2\cdot e^{-x}}{x} = \underset{x\to+\infty}{Lim}\frac{(-x)^2\cdot e^{-(-x)}}{-x} = \underset{x\to+\infty}{Lim}\frac{x^2\cdot e^{x}}{-x} = \underset{x\to+\infty}{Lim} -x\cdot e^{x} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

  Como m no es finito, tampoco existe asíntota oblicua si $x \to -\infty$.

Finalmente, con los datos anteriores la gráfica de la función es:



4. a) Hallar el punto en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x + 4$ es paralela a la recta de ecuación $y = 5x - 7$.
b) Calcular el área delimitada por la parábola de ecuación $y = 2x^2$ y la recta $y = 2x + 4$.

Solución:

a) Tengamos en cuenta las siguientes consideraciones:

- Dos rectas paralelas tienen igual pendiente.
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto $x = a$ es el valor de la derivada de la función en dicho punto, es decir, $f'(a)$.

Así, como:

- La recta dada, $y = 5x - 7$, tiene pendiente $m = 5$.
- $f'(x) = 2x - 1$

Se ha de cumplir que dichos valores coincidan, es decir:

$$2x - 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Por tanto el punto buscado tiene por coordenadas $(3, f(3))$, luego es el punto:

$$(3, f(3)) = (3, 10)$$

b) Calculemos en primer lugar los límites de integración. Estos vendrán dados por las soluciones de la ecuación resultante de igualar ambas funciones:

$$2x^2 = 2x + 4 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \ \text{ y } \ x = 2$$

Entre las dos abscisas obtenidas $x = -1$ y $x = 2$, se sitúa por encima la función $y = 2x + 4$ como se puede comprobar fácilmente si más que elegir una abscisa de dicho intervalo y comparar el valor de de su imagen para ambas funciones. Por ejemplo, si elegimos la abscisa $x = 0$, entonces:

Parábola: $y\,(0) = 2 \cdot 0^2 = 0$ Recta: $y\,(0) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$

Así pues, el área pedida viene dada por:

$$\acute{A}rea = \int_{-1}^{2} [(2x+4) - 2x^2]\,dx = \left[x^2 + 4x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(4 + 8 - \frac{16}{3}\right) - \left(1 - 4 + \frac{2}{3}\right) = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{27}{3} = 9\ u^2$$

OPCIÓN B

1. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + my = 1 - 2m \end{cases}$.
   a) Discutir el sistema según los valores de *m*.
   b) Hallar los valores de *m* para los que el sistema tenga alguna solución en la que $x = 2$.

Solución:

a) Consideremos las matrices de los coeficientes, *A*, y la matriz ampliada, $\overline{A}$, del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ -1 & m & 1-2m \end{array}\right)$$

Veamos cual es el determinante de *A*:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

Dicho determinante se anula para:

$$m^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -1 \;\text{ y }\; m = 1$$

Por tanto, tenemos que:

- Si $m \neq -1$ y $m \neq 1$ $\Rightarrow$ rango $(A) = 2 =$ rango $(\overline{A}) =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Tiene solución única.

- Si $m = -1$ $\Rightarrow$ Las matrices que tenemos son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

  En la matriz *A* ambas filas son iguales ($f_2 = f_1$) y por tanto rango $(A) = 1$. Sin embargo, rango $(\overline{A}) = 2$ ya que en dicha matriz es posible encontrar un menor de orden dos no nulo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2 \neq 0$$

  Por tanto rango $(A) = 1 \neq 2 =$ rango $(\overline{A})$ $\Rightarrow$ Sistema incompatible. No tiene solución.

- Si $m = 1$ $\Rightarrow$ Las matrices que tenemos son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

  En ambas matrices se cumple que la segunda fila es proporcional a la primera ($f_2 = -f_1$) y por tanto rango (A) = 1 = rango ($\overline{A}$) < 2 = nº incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

b) Para hallar los valores de m para los que el sistema tenga alguna solución en la que $x = 2$, sólo debemos tomar el sistema y sustituir en él la variable x por el valor que toma, 2:

$$\begin{cases} 2m - y = 1 \\ -2 + my = 1 - 2m \end{cases}$$

Obtenemos así un sistema, no lineal, de dos ecuaciones con dos incógnitas, m e y. Resolvámoslo por el método de sustitución. Despejando y de la primera ecuación:

$$y = 2m - 1$$

Sustituyendo en la segunda:

$$-2 + m(2m - 1) = 1 - 2m \quad \Rightarrow \quad 2m^2 + m - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{3}{2} \text{ y } m = 1$$

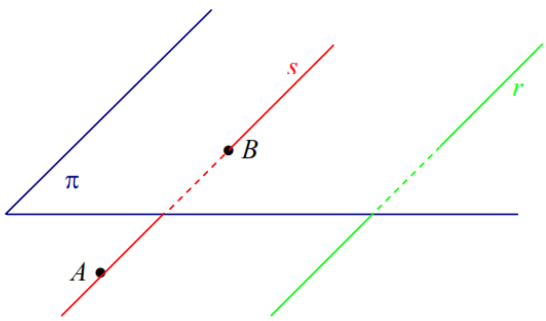
Para el caso $m = -\dfrac{3}{2}$ ($m \neq \pm 1$) el sistema es compatible determinado y su única solución sería $x = 2$ e $y = -4$.

Para el caso $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro ($x = 1 + \lambda$, $y = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$), y en una de ellas el valor de x es 2. Dicha solución es $x = 2$ e $y = 1$.

2. a) Dados el punto $A(3, 5, 1)$, la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y + 2 = z + 1$ y el plano $\pi \equiv 3x - 2y + z + 5 = 0$, determinar el punto B de π tal que la recta AB sea paralela a la recta r.
b) Hallar las coordenadas de un vector de módulo 1 que sea perpendicular a los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, siendo $P(1, 3, -1)$, $Q(2, 0, 1)$ y $R(-1, 1, 0)$.

Solución:

a) El punto B buscado es la intersección de la recta s, paralela a r que pasa por A, y el plano π.



Calculemos la recta s, que está determinada por al punto A y el vector director $\overrightarrow{v_r}$ de la recta r. Este último lo obtenemos fácilmente a partir de la ecuación continua de la recta r.

$$\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 1)$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Para obtener las coordenadas de B, intersección de la recta s y del plano π, sustituimos las coordenadas de un punto genérico de la recta s en la ecuación del plano π:

$$B = s \cap \pi \quad \Rightarrow \quad 3\,(3 + 2\lambda) - 2\,(5 + \lambda) + (1 + \lambda) + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$$

Por tanto el punto B es:

$$B(1, 4, 0)$$

b) Calculemos en primer lugar un vector, $\vec{n}$, que sea perpendicular a los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$. Este vendrá dado por el producto vectorial de ambos. Una vez hallado $\vec{n}$, calculamos el vector pedido normalizándolo, es decir, dividiéndolo entre su módulo para obtener un vector unitario de igual dirección y sentido que $\vec{n}$. Procedamos:

$$\overrightarrow{PQ} = (1, -3, 2) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{PR} = (-2, -2, 1)$$

Entonces:

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 5\,\vec{j} - 8\,\vec{k}$$

Por tanto, un vector, $\vec{u}$, de módulo 1 que es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ es:

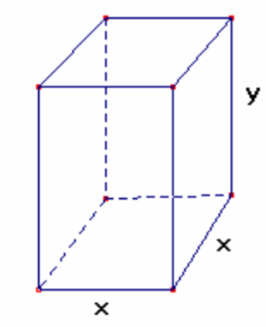
$$\vec{u} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{i} - 5\vec{j} - 8\vec{k}}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-8)^2}} = \frac{\vec{i} - 5\vec{j} - 8\vec{k}}{\sqrt{90}} = \frac{1}{\sqrt{90}}\vec{i} - \frac{5}{\sqrt{90}}\vec{j} - \frac{8}{\sqrt{90}}\vec{k} = \frac{\sqrt{90}}{90}\vec{i} - \frac{\sqrt{90}}{18}\vec{j} - \frac{4\sqrt{90}}{45}\vec{k}$$

Nota: El vector $-\vec{u}$ también cumple las condiciones pedidas.

3. Se desea construir un depósito de chapa (en forma de prisma recto, abierto y de base cuadrada) con una capacidad de 32000 litros. ¿Cuáles han de ser las dimensiones del depósito para que se precise la menor cantidad de chapa posible en su construcción?

Solución:

Consideremos un depósito con las dimensiones de la figura. La cantidad de chapa requerida para construirlo, la cual ha de ser mínima, viene dada por:



$$C(x, y) = \text{Superficie lateral} + \text{Base} = 4xy + x^2$$

Debemos por tanto minimizar esta función. La relación entre las variables viene dada por la capacidad del depósito (1 litro ~ 1 dm^3):

$$\text{Capacidad} = x^2 \cdot y = 32 \text{ m}^3$$

Por tanto:

$$x^2 \cdot y = 32 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{32}{x^2}$$

Sustituyendo en la función $C(x, y)$, tenemos que:

$$C(x) = 4x \cdot \frac{32}{x^2} + x^2 = \frac{128}{x} + x^2$$

Para estudiar sus extremos, calculamos la derivada primera:

$$C'(x) = -\frac{128}{x^2} + 2x$$

La igualamos a cero para calcular sus puntos singulares:

$$C'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{128}{x^2} + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3 - 128 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 64 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Veamos que se trata de un mínimo con la 2ª derivada:

$$C''(x) = \frac{256}{x^3} + 2 \quad \Rightarrow \quad C''(4) = \frac{256}{4^3} + 2 = 4 + 2 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo}$$

Por tanto, las dimensiones del depósito para que se precise la menor cantidad de chapa posible en su construcción son $x = 4$ m e $y = \frac{32}{4^2} = 2$ m.

4. a) Enunciar e interpretar geométricamente el Teorema de Rolle.
b) Hallar la primitiva de $f(x) = x^2 \ln x$ cuya gráfica pasa por el punto (1, 2).

Solución:

a) *Teorema de Rolle*: Si $f(x)$ es una función definida y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) y además se cumple que $f(a) = f(b)$, entonces, existe al menos un punto c del intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Geométricamente nos dice que si la función f cumple las condiciones requeridas en el teorema, entonces existe al menos un punto en el intervalo (a, b) en el cual la recta tangente a la gráfica de la función f trazada en dicho punto c es horizontal.

b) Calculemos la integral indefinida, $F(x)$, de la función dada, $f(x) = x^2 \ln x$.

$$F(x) = \int (x^2 \ln x)\, dx$$

Resolvamos la integral por partes:

$$\ln x = u \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}\, dx = du$$

$$x^2\, dx = dv \quad \Rightarrow \quad v = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

Entonces:

$$\int (x^2 \ln x)\, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

Buscamos una primitiva que pase por el punto (1, 2), esto es, $F(1) = 2$.

$$F(1) = \frac{1^3 \ln 1}{3} - \frac{1^3}{9} + C = -\frac{1}{9} + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{19}{9}$$

Por tanto la primitiva en cuestión es:

$$F(x) = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + \frac{19}{9}$$