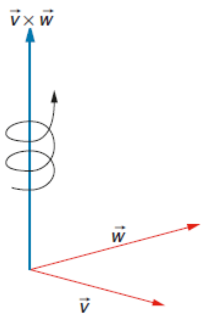
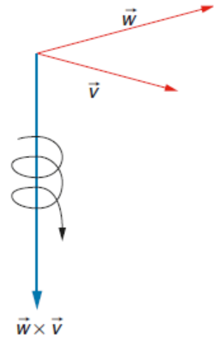
6 Producto vectorial y mixto. Aplicaciones

1. Producto vectorial de dos vectores libres
2. Aplicaciones del producto vectorial
3. Distancia de un punto a una recta
4. Distancia entre rectas
5. Producto mixto de vectores libres
6. Aplicaciones del producto mixto
7. Otras aplicaciones de los productos de vectores
8. La esfera

Producto vectorial y mixto. Aplicaciones
1. Producto vectorial de dos vectores libres

- El producto vectorial de dos vectores libres $\vec{v}$ y $\vec{w}$, que designaremos por $\vec{v} \times \vec{w}$, se define de la forma siguiente:
  - En el caso de que $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{w} = \vec{0}$ o $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean proporcionales, se tiene:
  $$\vec{v} \times \vec{w} = 0$$
  - En el caso de que $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{w} \neq \vec{0}$ y $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no sean proporcionales, se obtiene el vector $\vec{v} \times \vec{w}$, caracterizado por:
    — módulo: $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}|\,|\vec{w}| \operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right)$;
    — dirección: la de la recta perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$;
    — sentido: el de avance a derechas (dextrógiro) de un sacacorchos que gira en el sentido de $\vec{v}$ a $\vec{w}$ (ver en el margen).





Propiedades

1. El producto vectorial de *v* y *w* es nulo siempre que *v* = 0, *w* = 0 , o *v* y *w* sean iguales o proporcionales.

$$\vec{0} \times \vec{w} = \vec{v} \times \vec{0} = \vec{v} \times \vec{v} = \vec{v} \times t\vec{v} = \vec{0} \text{ (con } t \text{ un número real arbitrario)}$$

2. El producto vectorial es **anticonmutativo**.

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

3. El producto vectorial es distributivo respecto de la suma de vectores.

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

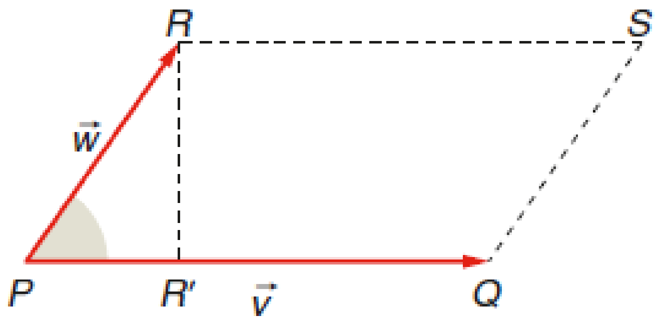
4. El producto vectorial cumple la siguiente relación relativa al producto de un número real por un vector.

$$(t\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (t\vec{w}) = t(\vec{v} \times \vec{w})$$

Producto vectorial y mixto. Aplicaciones

1. Producto vectorial de dos vectores libres

1.1. Interpretación geométrica del producto vectorial



- El módulo del producto vectorial de dos vectores libres coincide con el área del paralelogramo que tiene por lados dichos vectores.

$$\text{Área del paralelogramo} = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

1. Producto vectorial de dos vectores libres

1.2. Expresión analítica del producto vectorial

$$\vec{v} \times \vec{w} = (a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}) \times (a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}) =$$

$$= a_1a_2\,\vec{i}\times\vec{i} + a_1b_2\,\vec{i}\times\vec{j} + a_1c_2\,\vec{i}\times\vec{k} + b_1a_2\,\vec{j}\times\vec{i} + b_1b_2\,\vec{j}\times\vec{j} + b_1c_2\,\vec{j}\times\vec{k} +$$

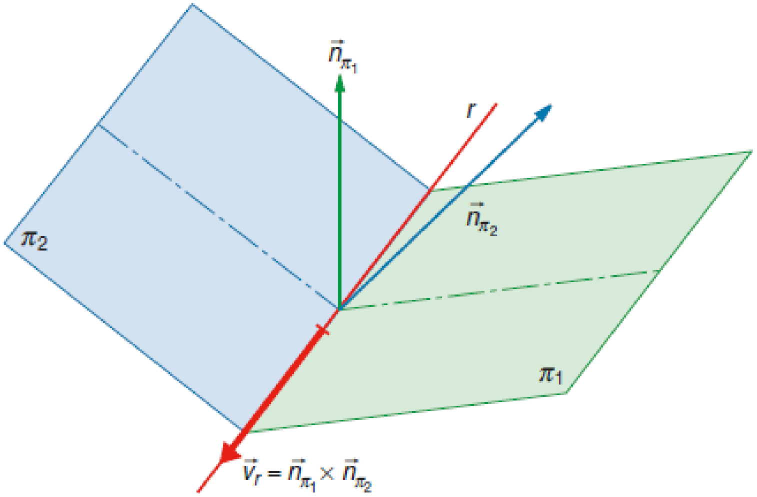
$$+ c_1a_2\,\vec{k}\times\vec{i} + c_1b_2\,\vec{k}\times\vec{j} + c_1c_2\,\vec{k}\times\vec{k} = (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{i} - (a_1c_2 - a_2c_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

- El vector resultante del producto vectorial de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ puede obtenerse a través del desarrollo del determinante *simbólico* siguiente:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Vector director de una recta

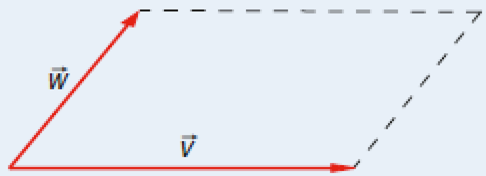


- Vector director de una recta:

$$r:\begin{cases}\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\\ \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}$$

Área de un paralelogramo

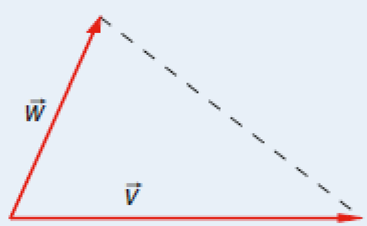
- El área del paralelogramo de lados no paralelos $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es:



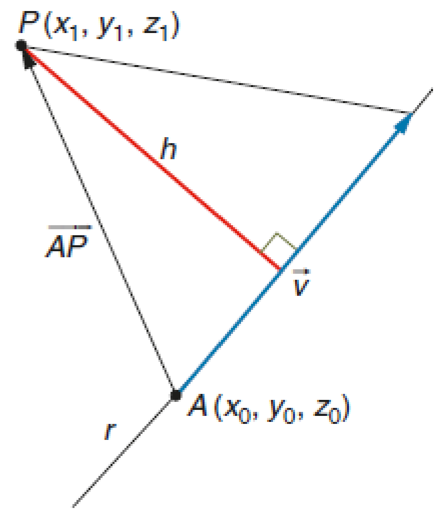
$$\text{Área del paralelogramo} = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

Área de un triángulo

- El área del triángulo definido por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es:



$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\,|\vec{v} \times \vec{w}|$$

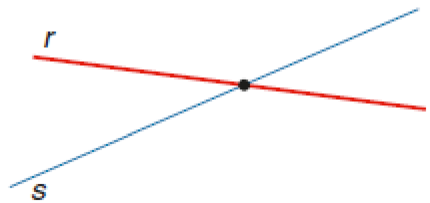


- La distancia de un punto P a una recta r de vector director $\vec{v}$ viene dada por:

$$d(P, r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

siendo A un punto cualquiera de la recta.

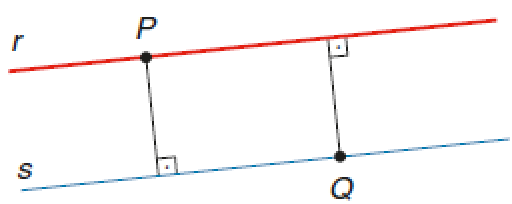
Rectas que se cortan



rectas que se cortan
$d(r, s) = 0$

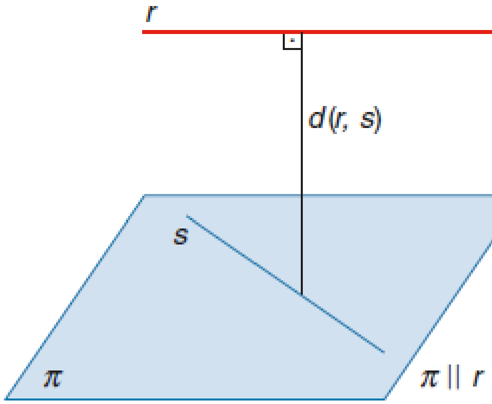
$$d(r, s) = 0$$

Rectas paralelas



$$d(r, s) = d(P, s) = d(Q, r)$$

Rectas que se cruzan



rectas que se cruzan

- Rectas que se cruzan:
  - Hallamos el plano que contiene a una de las rectas y que es paralelo a la otra.
  - La distancia entre ambas rectas es igual que la distancia de un punto de la recta paralela al plano.

5. Producto mixto de vectores libres

- El producto mixto de tres vectores libres $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, que designaremos por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, se obtiene operando consecutivamente los productos escalar y vectorial:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Propiedades

1. El producto mixto de tres vectores libres no se altera si se permutan circularmente los factores.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$$

2. El producto mixto cambia de signo si los factores se transponen de las expresiones anteriores.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$$

3. El producto mixto es distributivo respecto de la suma de vectores.

$$[\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}]$$

4. El producto mixto cumple la siguiente relación relativa al producto de un número real por un vector.

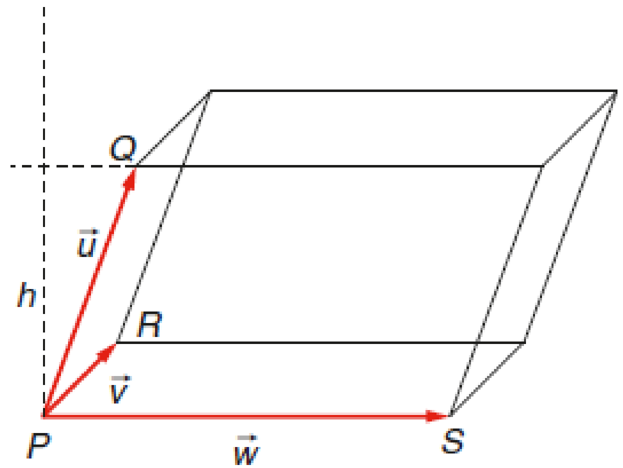
$$[t\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, t\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, t\vec{w}] = t[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

5. El producto mixto de tres vectores es nulo si, y solo si, los tres vectores son linealmente dependientes (coplanarios o proporcionales).

Producto vectorial y mixto. Aplicaciones

5. Producto mixto de vectores libres

5.1. Interpretación geométrica del producto mixto



- El valor absoluto del producto mixto de tres vectores es el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los tres vectores.

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

5.2. Expresión analítica del producto mixto

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) =$$

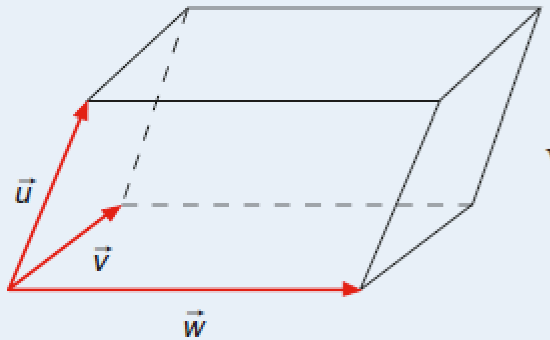
$$= (a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{k} \right) =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

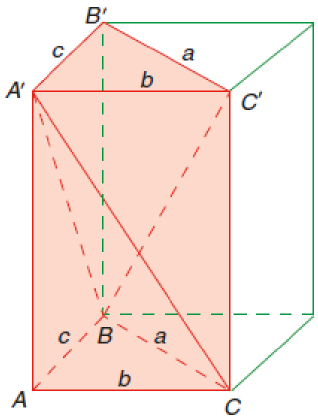
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Volumen del paralelepípedo

- El volumen del paralelepípedo de aristas concurrentes en un vértice $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es:

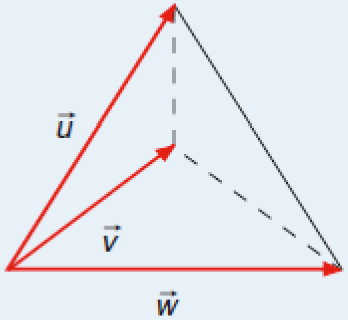


Volumen del paralelepípedo = $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$

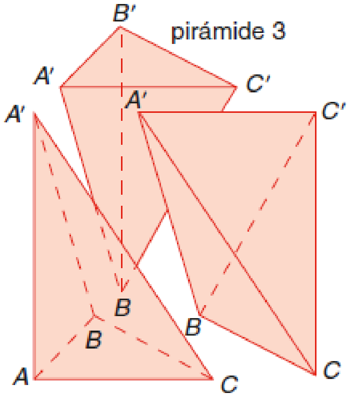


Volumen del tetraedro

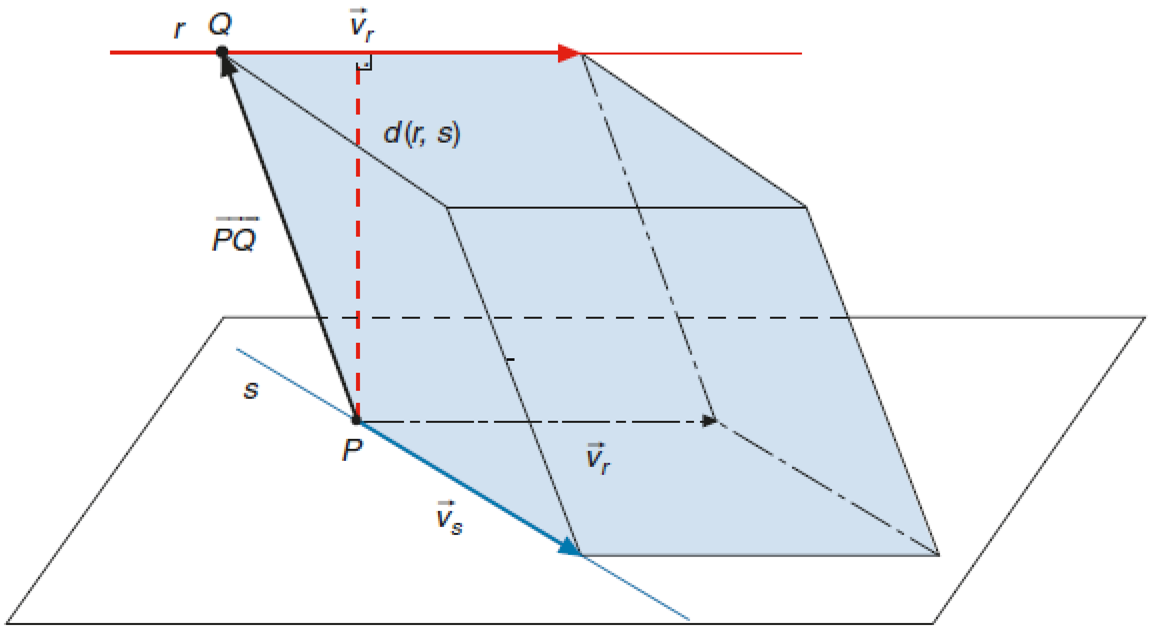
- El volumen del tetraedro de aristas concurrentes en un vértice $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ es:



$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\,\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$$

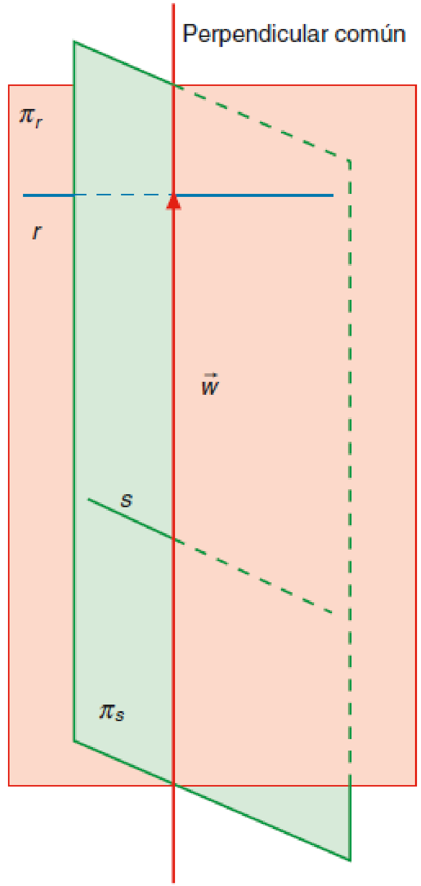


Distancia entre dos rectas que se cruzan



$$d(r, s) = \frac{\left|\left[\vec{v}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{PQ}\right]\right|}{\left|\vec{v}_s \times \vec{v}_r\right|}$$

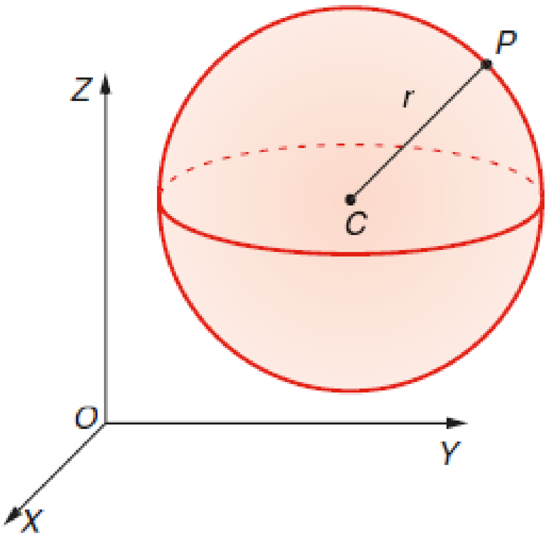
Recta perpendicular común a otras dos



- **Procedimiento analítico:**
  - Hallamos el plano π_r que contiene a la recta r y al vector $\vec{w}$, que es perpendicular a r y a s.
  - Hallamos el plano π_s que contiene a la recta s y al vector anterior $\vec{w}$.
  - La recta perpendicular común buscada es la intersección de los planos π_r y π_s.

8. La esfera

La **superficie esférica** es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ del espacio que están a igual distancia de un punto interior

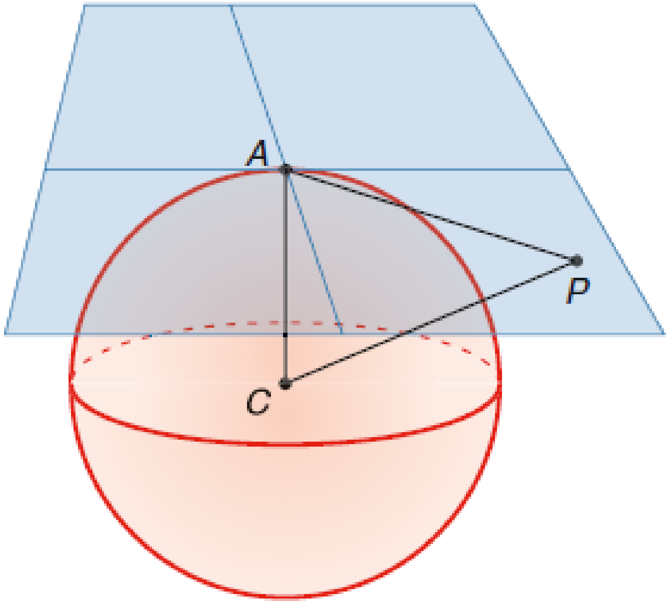


$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0$$

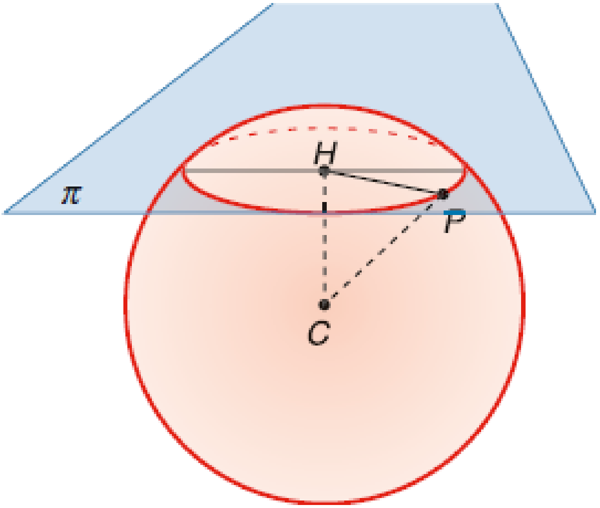
8. La esfera

8.1. Plano tangente a una esfera



Se llama **plano tangente** a la esfera en el punto *A* al plano que no tiene en común con la esfera otro punto que *A* y, además, es perpendicular al vector $\overline{CA}$.

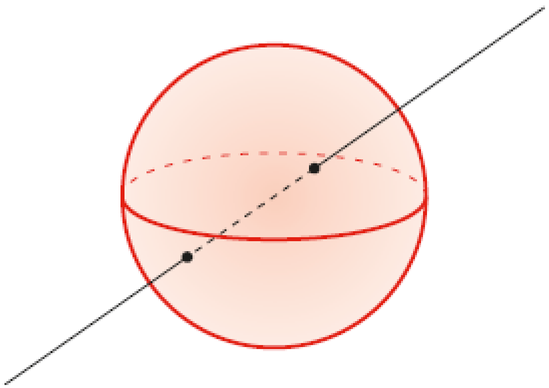
8.2. Intersección de una esfera con un plano

Para una esfera de centro *C* y radio *r*, y un plano π cuya distancia *d* al centro sea menor que el radio *r*, el conjunto de puntos *P* comunes a π y a la esfera es una circunferencia.
En el dibujo podemos observar que si *P* es uno de tales puntos y *H* es la proyección ortogonal del centro *C* sobre el plano π, se cumple que:

$$\left|\overrightarrow{HP}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{CH}\right|^2 = r^2 - d^2$$

8.3. Intersección de una esfera con una recta



Consideramos la esfera de ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0$$

y la recta de ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc$$

Sustituyendo estas últimas en la ecuación de la esfera, se obtiene una ecuación de segundo grado en t. Sean t_1 y t_2 las soluciones de dicha ecuación. Pueden ocurrir los siguientes casos:

- Si t_1 y t_2 son reales y distintos, la recta tiene en **común** con la esfera **dos puntos** cuyas coordenadas se obtienen sustituyendo estos valores en las ecuaciones de la recta.
- Si t_1 y t_2 son iguales, la recta es **tangente** a la esfera.
- Si t_1 y t_2 son números complejos, la recta es **exterior** a la esfera.