	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 2**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 4 primeros ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2,25 puntos, y el quinto ejercicio sobre un máximo de 1 punto. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Estudiar si A y B tienen inversa y calcularla cuando sea posible. **(1 punto)**

b) Determinar X tal que $AX=2B+I$ siendo $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **(1,25 puntos)**

E2.- Determinar la recta r que es paralela al plano $\pi \equiv x-y-z=0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-4}$ en el punto $P(2,-1,-2)$. **(2,25 puntos)**

E3.- a) Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente. **(1 punto)**

b) Encontrar un intervalo en el que $P(x)=x^6+x^4-1$ tenga al menos una raíz. **(1,25 puntos)**

E4.- a) Calcular la recta tangente a la curva $f(x)=4e^{x-1}$ en el punto $\left(1, f(1)\right)$. **(1 punto)**

b) Calcular el área de la región delimitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $g(x)=x^3$ y la recta $y=4x$. **(1,25 puntos)**

E5.- Se lanzan dos dados (con forma cúbica) al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 8? **(1 punto)**

OPCIÓN B

E1.- a) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} x+\lambda y+\lambda z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+4z=2 \end{cases}$$

(1,25 puntos)

b) Resolverlo para $\lambda=1$. **(1 punto)**

E2.- Dado el plano $\pi \equiv 3x+y+z-2=0$ y los puntos $P(0,1,1), Q(2,-1,-3)$ que pertenecen al plano π, determinar la recta del plano π que pasa por el punto medio entre $P\ y\ Q$ y es perpendicular a la recta que une estos puntos. **(2,25 puntos)**

E3.- a) Dado el polinomio $P(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x+C$, hallar C para que el valor de $P(x)$ en su mínimo relativo sea 1. **(1,25 puntos)**

b) Calcular $\lim_{x\to 0+} x\ln x$. **(1 punto)**

E4.- Sea $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & si \quad x\le 1 \\ a+\ln x & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Encontrar a para que la función sea continua. **(1 punto)**

b) Hallar el área de la región delimitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x=1,\ y=1$.
(1,25 puntos)

E5.- La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 3 caras en tres lanzamientos? **(1 punto)**

OPCIÓN A

E1.- Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad y \quad$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudiar si **A** y **B** tienen inversa y calcularla cuando sea posible. **(1 punto)**

b) Determinar **X** tal que **AX = 2B + I** siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **(1,25 puntos)**

a) Para que una matriz tenga inversa es necesario que su determinante no sea nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\ A^t \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow No\ existe\ B^{-1}$$

b)

$$A^{-1}AX = A^{-1}(2B + I) \Rightarrow IX = A^{-1}(2B + I) \Rightarrow X = A^{-1}(2B + I)$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

E2.- Determinar la recta r que es paralela al plano $\pi \equiv x - y - z = 0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-4}$ en el punto **P(2 , -1 , -2)** . **(2,25 puntos)**

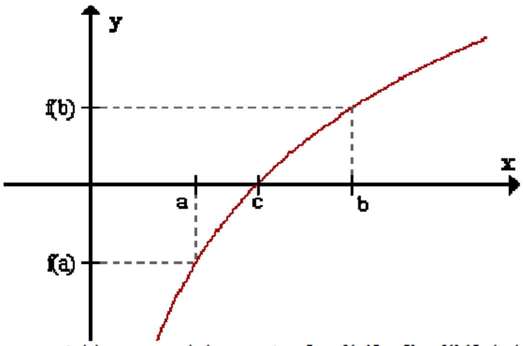
EL vector director de la recta **r** es perpendicular al del plano π y al de la recta **s**, respectivamente, por ello es el resultado del producto vectorial de ambos.
El punto **P** define totalmente a la recta pedida.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v_\pi} = (1, -1, -1) \\ \vec{v_s} = (1, 2, -4) \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v_r} = \vec{v_\pi} \wedge \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} + \vec{k} + 2\vec{i} + 4\vec{j} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{v_r} = (6, 3, 3) \equiv (2, 1, 1) \Rightarrow r \equiv \frac{x-2}{2} = y + 1 = z + 2$$

E3.- a) (1 punto) Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente.
b) (1,25 puntos) Encontrar un intervalo en el que P(x) = $\mathbf{x^6 + x^4 - 1}$ tenga al menos una raíz.

a) **<u>Teorema de Bolzano,</u>** dice
Que si f(x) es continua en el intervalo [a , b], y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [sign f(a) $\neq$ sign f(b)], entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que **f(c) = 0**



Geométricamente, el teorema establece que si dos puntos **[a , f(a)] y [b , f(b)]** de la gráfica de una función continua están situados en diferentes lados del eje **x**, entonces la gráfica intersecta al eje en algún punto entre **a** y **b**. Por supuesto puede haber varias intersecciones.

b) (1,25 puntos) Encontrar un intervalo en el que P(x) = $\mathbf{x^6 + x^4 - 1}$ tenga al menos una raíz.

La función **Px) =** $\mathbf{x^6 + x^4 -1}$ es una función continua en todo R, por ser una función polinómica; por tanto es continua en el intervalo cerrado [0,1].

Además, se verifica que: **P(0) =** $0^6 + 0^4 -1$ **= -1 < 0** y **P(1) =** $1^6 + 1^4 -1$ **= 1 > 0**.

En consecuencia, se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano (tenemos una función continua en un intervalo cerrado que toma valores de signo opuesto en los extremos del mismo) y, por tanto, también se cumplirá la tesis: $\exists$ c $\in$ [0,1] / P(c) = 0, es decir $\mathbf{c^6 + c^4 - 1 = 0}$**,** y nuestra ecuación tiene una solución en el intervalo [0,1].

E4.- a) Calcular la recta tangente a la curva **f(x) = 4e^x-1** en el punto **[1 , f(1)] (1 punto)**
b) Calcular el área de la región delimitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función **g(x) = x³** y la recta **y = 4x (1,25 puntos)**

a)

$$f'(x) = 4e^{x-1} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 4e^{1-1} = 4\,e^0 = 4\cdot 1 = 4 \\ f(x) = 4e^{1-1} = 4\,e^0 = 4\cdot 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow y-4 = 4\cdot(x-1) \Rightarrow y-4 = 4x-4 \Rightarrow 4x-y=0$$

b)

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \Rightarrow x=0 \\ 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow x^3 = 4x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow (x^2-4)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \Rightarrow \end{cases} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$1 \in (0\,,2) \Rightarrow \begin{cases} 1^3 = 1 > 0 \\ 4\cdot 1 = 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow 4x > x^3$$

$$S = \int_0^2 4x\,dx - \int_0^2 x^3\,dx = 4\cdot\left[x^2\right]_0^1 - \frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_0^1 = 4\cdot\left(2^2-0^2\right) - \frac{1}{4}\cdot\left(2^4-0^4\right) = 4\cdot 4 - \frac{1}{4}\cdot 16 = 16-4 = 12\,u^2$$

E5.- Se lanzan dos dados (con forma cúbica) al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea **8**? **(1 punto)**

Sabemos que el número de casos posibles del espacio muestral E al lanzar dos dados es 6x6 = 36 (6 veces de cada dado).

Sea el suceso A = “la suma de los puntos sea 8” = {2-6 ; 6-2; 3-5; 5-3; 4-4}. Vemos que sólo hay cinco casos favorables.

p(A) = $\dfrac{\text{nº casos favorables a que ocurra A}}{\text{nº casos posibles de E}}$ = **5/36 ≅ 0’138889.**

OPCIÓN B

E1.- a) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones, según el valor del parámetro λ

$$\begin{cases} x+\lambda y+\lambda z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+4z=2 \end{cases}$$ **(1,25 puntos)**

b) Resolverlo para λ **= 1**. **(1 punto)**

a)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & \lambda & \lambda\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \lambda-1 & \lambda-1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}\lambda-1 & \lambda-1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-[3(\lambda-1)-(\lambda-1)]=4(\lambda-1)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow 4(\lambda-1)=0\Rightarrow$$

$$\lambda-1=0\Rightarrow\lambda=1$$

$$\forall\lambda\in\Re-\{1\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=\textit{Número de incógnitas}\Rightarrow \textit{Sistema Compatible Determinado}$$

$$Si\ \lambda=1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<\textit{Número de incógnitas}\Rightarrow$$

$$\textit{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b)

$$Si\ \lambda=1\Rightarrow \textit{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\end{array}\right)\Rightarrow y+3z=1\Rightarrow y=1-3z\Rightarrow x+1-3z+z=1\Rightarrow x=2z\Rightarrow \textit{Solución}\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=(2\lambda\,,1-3\lambda\,,\,\lambda)$$

E2.- Dado el plano $\pi \equiv 3x + y + z - 2 = 0$ y los puntos **P(0 , 1 , 1)** y **Q(2 , -1 , -3)** que pertenecen al plano π, determinar la recta del plano π que pasa por el punto medio de **P** y **Q** y es perpendicular a la recta que une estos puntos **(2,25 puntos)**

El vector director de la recta **r** buscada es perpendicular al vector director del plano π y al vector **PQ** (tendremos que hallar su producto vectorial para hallarlos), siendo uno de sus puntos el punto medio **S** del segmento **PQ** que define la recta buscada

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (3\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{PQ} = (2\,,-1\,,3) - (0\,,1\,,1) = (2\,,-2\,,2) \equiv (1\,,-1\,,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} \wedge \overrightarrow{PQ} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} - \vec{k} + \vec{i} - 3\vec{j} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2\,,-2\,,-4) \equiv (1\,,-1\,,-2)$$

$$\begin{cases} x_s = \dfrac{0+2}{2} = 1 \\ y_s = \dfrac{1+(-1)}{2} = 0 \\ z_s = \dfrac{1+(-3)}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow S(1\,,0\,,-1) \Rightarrow r \equiv x - 1 = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$$

E3.- a) Dado el polinomio $P(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + C$, hallar **C** para que el valor de **P(x)** en su mínimo relativo sea **1 (1,25 puntos)**

b) Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$ **(1 punto)**

a)

$$P'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{6x}{2} + 2 = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow P'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ x = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow P''(x) = 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} P''(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \Rightarrow \textit{Máximo} \\ P''(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \Rightarrow \textit{Mínimo} \end{cases} \Rightarrow P(2) = 1$$

$$1 = \frac{2^3}{3} - \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2 + C \Rightarrow C = 1 - \frac{8}{3} + 6 - 4 = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

b)

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \cdot \ln 0 = 0 \cdot (-\infty) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln 0}{\frac{1}{0}} = \frac{-\infty}{\infty} = \xrightarrow{\textit{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

E4.-a) Sea $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & si \quad x\le 1\\ a+\ln x & si \quad x>1\end{cases}$

a) Encontrar **a** para que la función sea continua **(1 punto)**
b) Hallar el área de la región delimitada por la gráfica de ***f(x)*** y las recta **x = 1**, **y = 1**. **(1,25 puntos)**

$a)$

$$\begin{cases} f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=(1-1)^2=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a+\ln 1=a+0=a\end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow a=0\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & si \quad x\le 1\\ \ln x & si \quad x>1\end{cases}$$

$b)$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0\Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1\\ \ln x=0\Rightarrow x=e^0=1\end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ y=1\Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2=1\Rightarrow x^2-2x+1=1\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow (x-2)x=0\Rightarrow \begin{cases}x=2\notin f(x)\\ x=0<1\end{cases}\\ \ln x=1\Rightarrow x=e^1=e\end{cases}$$

$$x=2\in(1\,,e)\Rightarrow\begin{cases}y=1>0\\ y=\ln 2>0\end{cases}\Rightarrow y>\ln x$$

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x=x(\ln x-1)+K$$

$$\begin{cases}\ln x=u\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x}\\ dx=dv\Rightarrow v=x\end{cases}$$

$$S=\int_1^e 1\cdot dx-\int_1^e \ln x\,dx=[x]_1^e-[x(\ln x-1)]_1^e=(e-1)-[e(\ln e-1)-1(\ln 1-1)]=e-1-[e(1-1)-(0-1)]$$

$$S=\int_1^e 1\cdot dx-\int_1^e \ln x\,dx=e-1-[e\cdot 0-(-1)]=e-1-(0+1)=e-1-1=(e-2)\,u^2$$

E5.- La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de sacar **3** caras en tres lanzamientos? **(1 punto)**

El experimento lanzar una moneda y salir cara, es independiente del experimento volver a lanzar una moneda y salir cara, por tanto la probabilidad p(A∩B) = p(A)·p(B).

Sea el suceso Ai = lanzar una moneda y obtener cara en el lanzamiento número "i".
Nos dicen que p(Ai) = 1/2.

Nos piden **p(A1 y A2 y A3) =** p(A1∩A2∩A3) = p(A1)·p(A2)·p(A3) = (1/2)·(1/2)·(1/2) **= 1/8 = 0'125**.