	<p align="center">Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León</p>	<p align="center">MATEMÁTICAS II</p>	<p align="center">EJERCICIO Nº Páginas: 2</p>
---	---	---	---

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada ejercicio se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- a) Discutir para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz $M = \begin{pmatrix} -5 & a \\ 10 & -a-1 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

Calcular M^{-1} para $a = 0$. **(1,5 puntos)**

b) Si B es una matriz cuadrada de orden 3 y $|B| = -5$, calcular $|2B^t|$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B . **(1 punto)**

E2.- a) Calcular un vector de módulo 4 que tenga la misma dirección, pero distinto sentido, que el vector $\vec{v} = (2, 1, -2)$. **(1 punto)**

b) Calcular un punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ cuya distancia al punto $A = (-1, 2, 0)$ sea mínima. **(1,5 puntos)**

E3.- a) Calcular a , b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga pendiente nula en el punto $(1, 1)$ de su gráfica y, sin embargo, no tenga un extremo relativo en dicho punto. **(1,25 puntos)**

b) Probar que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene una única solución real positiva. **(1,25 puntos)**

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$. **(1 punto)**

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = 1 - x^2$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = -1$. **(1,5 puntos)**

OPCIÓN B

E1.- a) Discutir, según el valor del parámetro m , el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + mz = 2 \\ x + my + z = 2m \\ x + y - mz = 0 \end{cases} \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Resolverlo para $m = 1$. (1 punto)

E2.- Consideremos las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.

a) Comprobar que las rectas r y s se cruzan. (1 punto)

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas r y s . (1,5 puntos)

E3.- Tenemos un cartón cuadrado de 6 cm de lado y queremos construir con él una caja sin tapa. Para ello recortamos un cuadrado de x cm de lado en cada vértice del cartón. Calcular x para que el volumen de la caja sea máximo. (2,5 puntos)

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{1/x}$. (1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, el eje OX y la recta $x = 3$. (1,5 puntos)

Opción A

Ejercicio A1

- a) Discutir para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz $M = \begin{pmatrix} -5 & a \\ 10 & -a-1 \end{pmatrix}$ tiene inversa. Calcular M^{-1} para $a = 0$. (1'5 puntos)

Para que exista inversa de una matriz, su determinante no puede ser nulo:

$$|M| = \begin{vmatrix} -5 & a \\ 10 & -a-1 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-a-1) - 10 \cdot a = 5 \cdot a + 5 - 10 \cdot a = -5 \cdot a + 5 \neq 0 \rightarrow \boxed{a \neq 1}$$

Es decir:

$$\boxed{\exists M^{-1} \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}}$$

Y la matriz inversa M^{-1} se puede calcular de la siguiente manera:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot Adj(M^t)$$

Cuando $a = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |M| = 5,$$

$$M^t = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(M^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz M^{-1} para $a = 0$ resulta:

$$M^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

- b) Si B es una matriz cuadrada de orden 3 y $|B| = -5$, calcular $|2 \cdot B^t|$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B . (1 punto)

Recordemos que el determinante de una matriz coincide con el determinante de su traspuesta:

$$|B| = |B^t|$$

Además, al multiplicar una matriz por un número, cada elemento queda multiplicado por ese número. Esto tiene como consecuencia que el determinante queda multiplicado n veces por ese número, donde n indica el orden de la matriz correspondiente.

Por lo tanto:

$$|2 \cdot B^t| = 2^3 \cdot |B^t| = 8 \cdot |B| = 8 \cdot (-5) \rightarrow \boxed{|2 \cdot B^t| = -40}$$

Ejercicio A2

- a) Calcular un vector de módulo 4 que tenga la misma dirección, pero distinto sentido, que el vector $\vec{v} = (2, 1, -2)$. (1 punto)

En primer lugar, calculamos el vector unitario del vector \vec{v} :

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(2, 1, -2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{(2, 1, -2)}{3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Este vector tiene módulo unidad, y la misma dirección y sentido que \vec{v} . Como se pide un vector que tenga módulo 4 y la misma dirección, pero sentido opuesto, que el vector \vec{v} , tenemos que multiplicar a \vec{u}_v por -4 :

$$\boxed{\left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)}$$

- b) Calcular un punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ cuya distancia al punto $A = (-1, 2, 0)$ sea mínima. (1'5 puntos)

La recta r nos resultará más útil escrita en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

Pues el punto que buscamos, que llamaremos P , tendrá la forma:

$$P(1 - \lambda, -2 + \lambda, 3 - 2\lambda)$$

Dado que la distancia desde $A(-1, 2, 0)$ hasta P es la menor posible, el vector \overline{AP} será perpendicular a la recta o, lo que es lo mismo, perpendicular al vector director de la recta, $\vec{v}(-1, 1, -2)$. Esto significa que el producto escalar $\overline{AP} \cdot \vec{v}$ debe ser nulo. Teniendo esto en cuenta:

$$\overline{AP} = (2 - \lambda, -4 + \lambda, 3 - 2\lambda)$$

$$\overline{AP} \cdot \vec{v} = -1 \cdot (2 - \lambda) + 1 \cdot (-4 + \lambda) - 2 \cdot (3 - 2\lambda) = -2 + \lambda - 4 + \lambda - 6 + 4\lambda = -12 + 6\lambda$$

$$\overline{AP} \cdot \vec{v} = -12 + 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

Es decir, el punto buscado es aquel para el que $\lambda = 2$:

$$\boxed{P(-1, 0, -1)}$$

Estrategia de resolución alternativa:

Se determina el plano π perpendicular a r que pasa por A . Siendo el vector director de la recta \vec{v} un vector normal al plano:

$$\vec{n}(-1, 1, -2) \rightarrow \pi \equiv -x + y - 2z + D = 0$$

El plano ha de pasar por el punto $A(-1, 2, 0)$, por lo que sustituyéndolo en la expresión del plano se deduce el valor que ha de tener D para que se satisfaga esa condición:

$$-(-1) + 2 - 2 \cdot 0 + D = 0 \rightarrow D = -3$$

Por tanto, la ecuación del plano queda:

$$\pi \equiv -x + y - 2z - 3 = 0$$

El punto P buscado es la intersección del plano π con la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$. Sustituyendo en la ecuación del plano:

$$-(1 - \lambda) + (-2 + \lambda) - 2 \cdot (3 - 2\lambda) - 3 = 0$$

$$-1 + \lambda - 2 + \lambda - 6 + 4\lambda - 3 = 0$$

$$-12 + 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

Siendo $\lambda = 2$, el punto P resulta, finalmente:

$$P(1 - \lambda, -2 + \lambda, 3 - 2\lambda) \rightarrow \boxed{P(-1, 0, -1)}$$

Estrategia de resolución alternativa:

Sabiendo que la recta pasa por el punto $P_0(1, -2, 3)$ y que su vector director es $\vec{v}(-1, 1, -2)$, podemos calcular la distancia de la recta al punto $A(-1, 2, 0)$, mediante la fórmula:

$$d(A, r) = \frac{|\vec{v} \times \overline{P_0A}|}{|\vec{v}|}$$

Siendo $\overline{P_0A} = (-2, 4, -3)$:

$$\vec{v} \times \overline{P_0A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (-3 + 8) \cdot \vec{i} - (3 - 4) \cdot \vec{j} + (-4 + 2) \cdot \vec{k} \rightarrow (5, 1, -2)$$

$$d(A, r) = \frac{|\vec{v} \times \overline{P_0A}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-2)^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

Esta es la distancia del punto A al punto P buscado, es decir, coincide con el módulo del vector \overline{AP} . Si el punto P tiene la forma $(1 - \lambda, -2 + \lambda, 3 - 2\lambda)$:

$$\overline{AP} = (2 - \lambda, -4 + \lambda, 3 - 2\lambda)$$

$$|\overline{AP}| = \sqrt{(2 - \lambda)^2 + (-4 + \lambda)^2 + (3 - 2\lambda)^2} = \sqrt{5}$$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene que $\lambda = 2$, por lo que el punto P resulta:

$$\boxed{P(-1, 0, -1)}$$

Ejercicio A3

- a) Calcular a , b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga pendiente nula en el punto $(1, 1)$ de su gráfica y, sin embargo, no tenga un extremo relativo en dicho punto. (1'25 puntos)

En este tipo de problemas, debemos encontrar en el enunciado las pistas suficientes como para llegar a tantas ecuaciones como incógnitas hay.

La primera información que tenemos de la función es que pasa por el punto $(1, 1)$:

$$f(1) = 1 \rightarrow 1 + a + b + c = 1 \Rightarrow a + b + c = 0 \text{ [ecuación 1]}$$

También sabemos que la pendiente de $(1, 1)$ es nula, es decir, la recta tangente en $x = 1$ es horizontal, por lo que la primera derivada en ese punto es cero:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -3 \text{ [ecuación 2]}$$

Además, nos dicen que en ese punto no hay un máximo (en cuyo caso, habría de ser $f''(1) < 0$) ni un mínimo (por lo que tampoco se cumple que $f''(1) > 0$). En consecuencia, $f''(1) = 0$:

$$f''(x) = 6x + 2a \rightarrow f''(1) = 6 + 2a = 0 \rightarrow 2a = -6 \rightarrow \boxed{a = -3} \text{ [ecuación 3]}$$

Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación 2:

$$2 \cdot (-3) + b = -3 \rightarrow \boxed{b = 3}$$

Sustituyendo los valores de a y b en la ecuación 1:

$$-3 + 3 + c = 0 \rightarrow \boxed{c = 0}$$

Así pues, la función dada es:

$$\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x}$$

- b) Probar que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene una única solución real positiva. (1'25 puntos)

La función $f(x) = x^5 + x - 1$ es continua y derivable en todo \mathbb{R} .

En primer lugar, demostraremos que existe, al menos, una raíz, es decir, un punto donde la función corta al eje de las x . Recurriremos al teorema de Bolzano:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [a, b] \\ \text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b) \end{array} \right\} \rightarrow \exists c \in (a, b) / f(c) = 0$$

Para ello, debemos encontrar un intervalo en el que la función cambie de signo. Por ejemplo:

$$f(-1) = -3, \quad f(1) = 1$$

Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [-1, 1] \\ \text{signo } f(-1) \neq \text{signo } f(1) \end{array} \right\} \rightarrow \exists c \in (-1, 1) / f(c) = 0$$

Así que podemos asegurar que hay una solución en el intervalo $[-1, 1]$.

Ahora bien, se nos pide demostrar que esta solución es única. Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que $\exists s \neq c / f(s) = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [s, c] \\ \text{Si } s < c, \text{ por el teorema de Rolle } \rightarrow f(x) \text{ es derivable en } (s, c) \\ f(s) = f(c) \end{array} \right\} \rightarrow \exists r \in (s, c) / f'(r) = 0$$

Si esto fuera cierto, debería existir algún punto en el que su primera derivada sea nula. Si estudiamos su derivada:

$$\text{Siendo } f'(x) = 5x^4 + 1 \rightarrow f'(x) > 0, \forall x$$

No puede existir ningún r cuya derivada sea nula, como debería ocurrir de ser ciertas las hipótesis del teorema de Rolle. Se llega a un absurdo, una contradicción que invalida el supuesto del que partimos. La misma demostración se puede hacer si suponemos que $s > c$. En definitiva, no existe ningún s que anule la función, y la única solución que existe es la que se encuentra en el intervalo $[-1, 1]$.

Ejercicio A4

a) **Calcular:** (1 punto)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^x - 1 - x}{x \cdot (e^x - 1)} \right] = \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x \cdot e^x} \right] \\ &= \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^x}{e^x + e^x + x \cdot e^x} \right] = \frac{1}{1 + 1} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

b) **Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = 1 - x^2$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = -1$.** (1'5 puntos)

Determinamos las rectas tangentes a la gráfica en $x = 1$ y $x = -1$:

$$f(x) = 1 - x^2, \quad f(1) = 0, \quad f(-1) = 0$$

$$f'(x) = -2x, \quad f'(1) = -2, \quad f'(-1) = 2$$

$$\text{Tangente en } (1, 0) \rightarrow y - 0 = -2 \cdot (x - 1) \rightarrow y = -2x + 2$$

$$\text{Tangente en } (-1, 0) \rightarrow y - 0 = 2 \cdot (x + 1) \rightarrow y = 2x + 2$$

Teniendo esto en cuenta, el área pedida es:



$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 [(2x + 2) - (1 - x^2)] \cdot dx + \int_0^1 [(-2x + 2) - (1 - x^2)] \cdot dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \cdot dx + \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \left[0 - \left(\frac{-1}{3} + 1 - 1 \right) \right] + \left[\left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) - 0 \right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3} \text{ u}^2} \end{aligned}$$

Opción B

Ejercicio B1

- a) Discutir, según el valor del parámetro m , el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + y + mz = 2 \\ x + my + z = 2m \\ x + y - mz = 0 \end{cases}$$

(1'5 puntos)

Recurriremos al teorema de Rouché-Frobenius para discutir el número de soluciones de este sistema. Así que comenzaremos por definir la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 2 \\ 1 & m & 1 & 2m \\ 1 & 1 & -m & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación evaluamos el rango de M , en función de los valores de m para los que $|M| = 0$:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 1 + m - m^2 - 1 + m = -2m^2 + 2m$$

$$\text{Si } |M| = 0 \rightarrow -2m^2 + 2m = 0 \rightarrow m \cdot (-2m + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Así pues, si $m \neq 0$ o $m \neq 1$, el rango de M es 3. Si $m = 0$ o $m = 1$, el rango de M es 2, pues siempre existe al menos un determinante de orden 2 no nulo en ella. Por tanto:

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$:

En este caso, $\text{ran}(M) = \text{ran}(M^*) = 3$, que coincide con el número de incógnitas:

$$\boxed{\text{Si } m \neq 0 \text{ y } m \neq 1 \rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO}}$$

- Si $m = 0$:

En este caso, el $\text{ran}(M) = 2$, pero $\text{ran}(M^*) = 3$, pues podemos encontrar algún determinante de orden tres no nulo en ella:

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\boxed{\text{Si } m = 0 \rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE}}$$

- Si $m = 1$:

En este caso, $\text{ran}(M) = \text{ran}(M^*) = 2$, pues en la matriz M^* hay dos filas iguales:

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Si } m = 1 \rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO}}$$

b) Resolverlo para $m = 1$. (1 punto)

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \rightarrow F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y = \lambda \\ -2z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - y - z \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Por lo que las soluciones a este sistema compatible indeterminado son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}}$$

E2.- Consideremos las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$

a) Comprobar que las rectas r y s se cruzan. (1 punto)

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas r y s . (1,5 puntos)

a) Puestas las rectas en ecuaciones paramétricas, e igualando los valores de los puntos generales, tendremos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si la matriz de los coeficientes ampliada es nula y hay algún valor de la matriz de los coeficientes, de grado 2, no nula, el sistema es Compatible Determinado y las rectas son secantes y se cortan en un punto, de no haber ningún determinante de la matriz de los coeficientes de orden 2, el sistema es Compatible Indeterminado y la rectas se confunden. Si la matriz del determinante de los coeficientes ampliados no es nulo el sistema es incompatible, si los vectores directores de la rectas son iguales o proporcionales, las rectas son paralelas, de no ser así se cruzarán

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 1 + 3\mu \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = 2\mu \\ \lambda = 1 + 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ \lambda - 3\mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ 2\lambda - \mu = -1 \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$|A/B| = -(-4+3) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Sistema Incompatible \Rightarrow Las rectas son paralelas o se cruzan \Rightarrow

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 2) \\ \vec{v}_s = (2, 3, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2} \neq \frac{1}{3} \Rightarrow$$
 No son iguales ni proporcionales \Rightarrow Las rectas no son paralelas

Por lo tanto las rectas r y s se cruzan en el espacio

b) Siendo R y S los puntos genéricos de las rectas que tiene que estar alineadas con el origen de coordenadas, esta propiedad hace que los vectores OR Y OS son iguales o proporcionales. El vector director de la recta t buscada, es la diferencia entre los valores de las coordenadas de los puntos genéricos.

$$\begin{cases} \vec{OR} = (2\lambda, \lambda, 1+2\lambda) - (0, 0, 0) = (2\lambda, \lambda, 1+2\lambda) \\ \vec{OS} = (2\mu, 1+3\mu, \mu) - (0, 0, 0) = (2\mu, 1+3\mu, \mu) \end{cases} \Rightarrow \frac{2\lambda}{2\mu} = \frac{\lambda}{1+3\mu} = \frac{1+2\lambda}{\mu} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{1+3\mu} \Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{1+3\mu} \\ \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1+2\lambda}{\mu} \Rightarrow \lambda = 1+2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = 1+3\mu \Rightarrow 2\mu = -1 \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{v}_t = (2\lambda, \lambda, 1+2\lambda) - (2\mu, 1+3\mu, \mu) = (2\lambda - 2\mu, \lambda - 3\mu - 1, 2\lambda - \mu + 1) \\ \lambda = 1+2\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\vec{v}_t = \left[2 \cdot (-1) - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), -1 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1, 2(-1) - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \right] = \left(-2 + 1, -1 + \frac{3}{2} - 1, -2 + \frac{1}{2} + 1 \right)$$

$$\vec{v}_t = \left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \equiv (2, 1, 1) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 2\beta \\ y = \beta \\ z = \beta \end{cases}$$

a) **Comprobar que las rectas r y s se cruzan.** (1 punto)

Obtenemos las ecuaciones implícitas de r :

$$x = 2y, \quad 2y = z - 1, \quad r \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2y - z = -1 \end{cases}$$

Obtenemos las ecuaciones implícitas de s :

$$x = 2z, \quad y - 1 = 3z, \quad s \equiv \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$$

Sea la matriz M de los coeficientes y la matriz ampliada M^* , evaluamos sus rangos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) = 3$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow |M^*| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 6 - 2 + 2 = 6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M^*) = 4$$

Siendo $\text{ran}(M) = 3 \neq \text{ran}(M^*) = 4$, las rectas se cruzan en el espacio sin cortarse.

b) **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas r y s .** (1'5 puntos)

Expresamos las rectas r y s en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Punto } P(0, 0, 1) \\ \text{Vector } \overrightarrow{OP}(0, 0, 1), \\ \text{Vector } \vec{u}(2, 1, 2) \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 1 + 3\mu \\ z = \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Punto } Q(0, 1, 0) \\ \text{Vector } \overrightarrow{OQ}(0, 1, 0) \\ \text{Vector } \vec{v}(2, 3, 1) \end{cases}$$

Determinamos el plano π_1 que contiene a la recta r , al vector $\overrightarrow{OP}(0, 0, 1)$ y al punto $(0, 0, 0)$, y el plano π_2 que contiene a la recta s , al vector $\overrightarrow{OQ}(0, 1, 0)$ y al punto $(0, 0, 0)$:

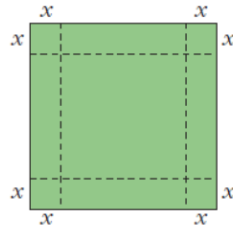
$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y = 0, \quad \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x + 2z = 0$$

La recta buscada es la intersección de π_1 y π_2 :

$$\boxed{\text{Recta} \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}} \rightarrow \boxed{\text{Recta} \equiv \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}}$$

Ejercicio B3

Tenemos un cartón cuadrado de 6 cm de lado y queremos construir con él una caja sin tapa. Para ello recortamos un cuadrado de x cm de lado en cada vértice del cartón. Calcular x para que el volumen de la caja sea máximo. (2'5 puntos)



La caja tiene de base un cuadrado de lado $6 - 2x$ y su altura es x , por lo que su volumen se expresa:

$$V = (6 - 2x)^2 \cdot x = (36 - 24x + 4x^2) \cdot x = 36x - 24x^2 + 4x^3$$

Optimizamos la función:

$$V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x \rightarrow V'(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12 \cdot (x^2 - 4x + 3)$$

$$V'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

La solución $x = 3$ no es aceptable, pues supondría recortar completamente el cartón (matemáticamente corresponde a un mínimo). Si $x = 1$ la función alcanza un máximo, como se puede comprobar evaluando el signo de la segunda derivada en este punto:

$$V''(x) = 24x - 48 \rightarrow V''(1) = 24 - 48 = -24 < 0 \rightarrow \text{Máximo}$$

Ejercicio B4

a) Calcular: (1 punto)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{1/x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{1/x} = [1^\infty] \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{1/x} = L \rightarrow \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{1/x} \right] = \ln L$$

$$\begin{aligned} \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{1/x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln (1 + x^2)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(1 + x^2) \right] = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(1 + x^2)}{x} \right] \\ &= \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{1/x} \right] = \ln L = 0 \rightarrow L = e^0 = \boxed{1}$$

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, el eje OX y la recta $x = 3$. (1'5 puntos)

Calculamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX :

$$\ln x = 0 \rightarrow x = 1$$

Por lo que debemos calcular el área comprendida bajo la gráfica en el intervalo $[1, 3]$:

$$A = \int_1^3 \ln x \cdot dx$$

Calculamos la integral indefinida por partes:

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} \cdot dx, \quad dv = dx, \quad v = x$$

$$\int \ln x \cdot dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x \cdot x - \int dx = x \cdot \ln x - x$$

Por lo que el área buscada es:

$$A = \int_1^3 \ln x \cdot dx = [x \cdot \ln x - x]_1^3 = (3 \ln 3 - 3) - (\ln 1 - 1) = \boxed{3 \ln 3 - 2}$$