	Pruebas de Acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº páginas: 2

INDICACIONES: **1.- OPTATIVIDAD**: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada ejercicio se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ 3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar los valores de m para los que la matriz A^{10} tenga inversa.
b) Para $m = 0$, calcular, si es posible, la matriz inversa de A.

2. a) Calcular la recta que corta perpendicularmente al eje OZ y que pasa por el punto $P = (1, 2, 3)$.
b) Estudiar, en función del parámetro a, la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + az = 1$.

3. Determinar los vértices del rectángulo de área máxima que tiene los lados paralelos a los ejes de coordenadas y vértices en el borde del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 2 - x^2$.

4. a) Sea g (x) una función continua y derivable en toda la recta real tal que g (0) = 0 y g (2) = 2. Probar que existe algún punto c del intervalo (0, 2) tal que $g'(c) = 1$.
b) Hallar la función $f(x)$ que cumple que $f'(x) = x\ln(x^2 + 1)$ y $f(0) = 1$.

OPCIÓN B

1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + my = -1 \\ (1-2m)x - y = m \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.
b) Resolver el sistema en los casos en que la solución no sea única.
c) Calcular los valores de m para que $x = -3$, $y = 2$ sea solución.

2. a) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$, $|\vec{u}| = 1$ y $|\vec{v}| = 2$?
b) Hallar el valor de a para que exista una recta que pase por el punto $P = (1 + a, 1 - a, a)$, corte a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ y sea paralela a la recta $s \equiv \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, determinar su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

4. a) Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)} \right)$.

b) Calcular el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y la recta $x = e$.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ 3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar los valores de m para los que la matriz A^{10} tenga inversa.
b) Para $m = 0$, calcular, si es posible, la matriz inversa de A.

Solución:

a) Para que una matriz tenga inversa se ha de cumplir que su determinante sea distinto de cero.

$$A^{10} \text{ posee inversa} \quad \Leftrightarrow \quad |A^{10}| \neq 0$$

Calculemos pues el determinante de A^{10}. Pero en lugar de calcular directamente dicho determinante (pues el cálculo de A^{10} sería laborioso), procedamos de otro modo. Para ello, recordemos en primer lugar la siguiente propiedad de los determinantes:

> Dadas dos matrices A y B, el determinante de la matriz producto de A y B, $|A \cdot B|$, es igual al producto de los determinantes de dichas matrices, $|A| \cdot |B|$.
>
> $$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Considerando esta propiedad, tenemos que:

$$|A^{10}| = |A|^{10}$$

Si tenemos en cuenta que una potencia sólo se anula si la base es nula, tenemos que:

$$|A^{10}| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |A|^{10} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0$$

Por tanto, A^{10} tendrá inversa si el determinante de la matriz A es no nulo.

$$A^{10} \text{ posee inversa} \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0$$

Veamos pues para qué valores se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ 3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m+2)\,(m+1)\,(m-1)$$

Este determinante se anula si:

$$(m+2)\,(m+1)\,(m-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -2, \quad m = -1 \quad \text{y} \quad m = 1$$

Así pues, A^{10} tendrá inversa si $m \neq -2, \quad m \neq -1 \quad$ y $\quad m \neq 1$.

b) Para $m = 0$ la matriz A será:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y su determinante es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Por tanto existe A^{-1} y viene dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\,(A^t)$$

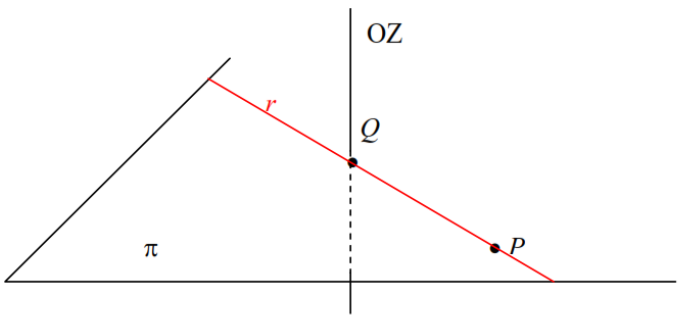
Calculémosla:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Adj\,(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. a) Calcular la recta que corta perpendicularmente al eje OZ y que pasa por el punto $P = (1, 2, 3)$.
b) Estudiar, en función del parámetro a, la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + az = 1$.

Solución:

a) Buscamos una recta, r, que corte perpendicularmente al eje OZ, y por tanto, ha de estar contenida en un plano, π, perpendicular a dicho eje, pero además ha de pasar por el punto P dado. Por tanto, la recta buscada, r, será aquella que pase por el punto, Q, intersección del plano π y el eje OZ y por el punto P.



Calculemos pues el plano π perpendicular al eje OZ que contenga al punto P. Dicho plano, tendrá como vector característico, $\vec{p}$, al vector director del eje OZ, $\vec{v_z}$.

$$\vec{p} = \vec{v_z} = (0, 0, 1)$$

Por tanto la ecuación del plano π será de la forma:

$$z + D = 0$$

Si imponemos la condición de que dicho plano pase por el punto P dado, tenemos que:

$$P \in \pi \quad \Rightarrow \quad 3 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -3$$

El plano π tiene por ecuación:

$$\pi \equiv z - 3 = 0$$

Calculemos ahora el punto Q, intersección del eje OZ y el plano π. Para ello, escribamos las ecuaciones paramétricas del eje OZ y sustituyamoslas en la ecuación del plano.

$$\text{eje OZ} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano π:

$$\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3$$

Por tanto, el punto Q tiene por coordenadas:

$$Q = (0, 0, 3)$$

La recta r buscada pasa por los puntos P y Q, y por tanto un vector director, $\vec{v_r}$, de la misma será:

$$\vec{v_r} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (1, 2, 3) - (0, 0, 3) = (1, 2, 0)$$

Por tanto las ecuaciones paramétricas de la recta buscada, r, son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 + 2\mu, \text{ con } \mu \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$$

b) Estudiemos, en función del parámetro a, la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + az = 1$. Para ello, consideremos el sistema formado por las dos ecuaciones implícitas de la recta r y la ecuación del plano π.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Consideremos las matrices de los coeficientes y ampliada de dicho sistema:

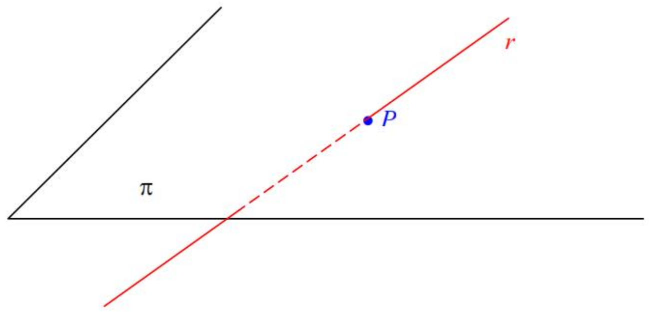
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de M calculando su determinante:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a$$

Dicho determinante se anula si $a = 0$. Por tanto:

- Si $a \neq 0 \Rightarrow$ rango (M) = rango $(\overline{M}) = 3$ = número incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D. (Solución única). En este caso, la recta r y el plano π se cortan en un único punto P.



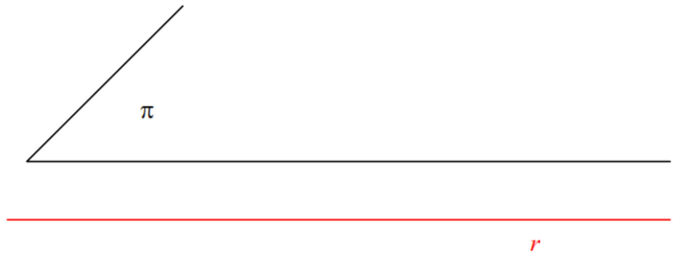
- Si $a = 0 \Rightarrow$ rango $(M) = 2$, pues podemos encontrar en ella un menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

  Orlando dicho menor con los elementos de la última fila y la columna de los términos independientes, tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

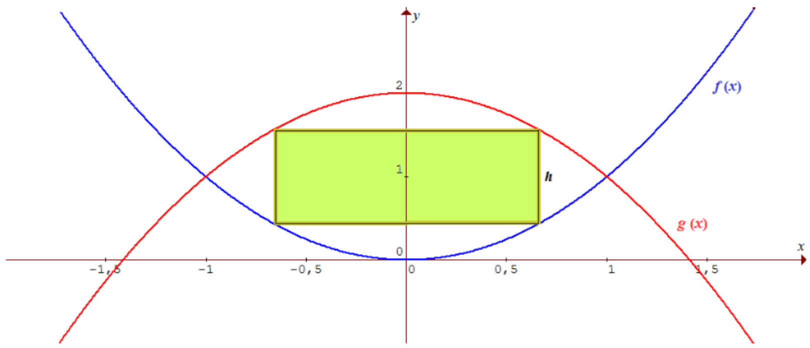
Por tanto, en este caso se tiene que rango (M) = 2 ≠ 3 = rango ($\overline{M}$) ⇒ S.I. (Sin solución). En este caso, la recta r y el plano π son paralelos.



3. Determinar los vértices del rectángulo de área máxima que tiene los lados paralelos a los ejes de coordenadas y vértices en el borde del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 2 - x^2$.

Solución:

Para comprender mejor la situación a la que nos enfrentamos y poder resolver mejor el problema, intentemos hacer un dibujo de la situación planteada. Las funciones f y g tienen por representación gráfica dos parábolas simétricas respecto al eje OY (tienen simetría par), como se puede ver en la siguiente figura:



Hemos dibujando un rectángulo cualquiera, con sus lados paralelos a los ejes de coordenadas y cuyos vértices están situados sobre las parábolas. Dicho rectángulo tendrá por dimensiones:

$$\textit{Base}: 2x$$

$$\textit{Altura}: h = g(x) - f(x) = (2 - x^2) - x^2 = 2 - 2x^2$$

Por tanto su área es:

$$\textit{Área} = A(x) = 2x \cdot (2 - 2x^2) = 4x - 4x^3 \qquad (x > 0)$$

Veamos para qué valor se maximiza:

$$A'(x) = 4 - 12x^2$$

Obtenemos los puntos singulares resolviendo la ecuación $A'(x) = 0$:

$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Consideraremos únicamente la solución positiva, pues la base del rectángulo no puede tener una dimensión negativa.

$$A''(x) = -24x \quad \Rightarrow \quad A''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -8\sqrt{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo}$$

Por tanto, las dimensiones del rectángulo de área máxima cuyos vértices están sobre los bordes del recinto delimitado por las parábolas son:

$$\textit{Base}:\ 2x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\textit{Altura}:\ h = g(x) - f(x) = (2 - x^2) - x^2 = 2 - 2x^2 = \frac{4}{3}$$

4. a) Sea g (x) una función continua y derivable en toda la recta real tal que g (0) = 0 y g (2) = 2. Probar que existe algún punto c del intervalo (0, 2) tal que $g'(c) = 1$.
b) Hallar la función $f(x)$ que cumple que $f'(x) = x \ln(x^2 + 1)$ y $f(0) = 1$.

Solución:

a) Recordemos en primer lugar el teorema del valor medio o de Lagrange.

> *Teorema del valor medio o de Lagrange*:
> Sea $g(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ que verifica que:

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Según el enunciado del problema tenemos una función $g(x)$ continua y derivable en toda la recta real, y por tanto, continua en el intervalo [0, 2] y derivable en el intervalo (0, 2). Entonces, por el teorema del valor medio o de Lagrange, existe un punto $c \in (0, 2)$ tal que:

$$g'(c) = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

como queríamos demostrar.

b) Calculemos en primer lugar una primitiva $f(x)$ de $f'(x)$:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int x\ln(x^2+1)\,dx$$

Hagamos esta integral por partes:

$$u = \ln(x^2+1) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$dv = x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

Entonces:

$$\int x\ln(x^2+1)\,dx = \ln(x^2+1)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2\ln(x^2+1)}{2} - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2\ln(x^2+1)}{2} - \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2\ln(x^2+1)}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$$

Como se ha de cumplir que $f(0) = 1$, entonces:

$$f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{0^2\ln(0^2+1)}{2} - \frac{0^2}{2} + \frac{\ln(0^2+1)}{2} + C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

Así pues, la función f pedida es:

$$f(x) = \frac{x^2\ln(x^2+1)}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{\ln(x^2+1)}{2} + 1$$

OPCIÓN B

1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+my=-1 \\ (1-2m)x-y=m \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.
b) Resolver el sistema en los casos en que la solución no sea única.
c) Calcular los valores de m para que $x = -3$, $y = 2$ sea solución.

Solución:

a) Consideremos las matrices de los coeficientes, A, y la matriz ampliada, $\overline{A}$, del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1-2m & -1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & -1 \\ 1-2m & -1 & m \end{array}\right)$$

Veamos cual es el rango de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1-2m & -1 \end{vmatrix} = -1 - m\,(1-2m) = 2m^2 - m - 1$$

Dicho determinante se anula para:

$$2m^2 - m - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2} \ \text{ y } \ m = 1$$

Por tanto, tenemos que:

- Si $m \neq -\frac{1}{2}$ y $m \neq 1$ $\Rightarrow$ rango $(A) = 2 =$ rango $(\overline{A}) =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado (Solución única)

- Si $m = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & -1 \\ 2 & -1 & -1/2 \end{array}\right)$

  En este caso, rango $(A) = 1$, pero rango $(\overline{A}) = 2$, pues podemos encontrar un menor de orden dos no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \neq 0$$

  Por tanto el sistema es incompatible (No tiene solución).

- Si $m = 1$ $\Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

  En este caso, rango $(A) = 1 =$ rango $(\overline{A}) < 2 =$ número de incógnitas, pues en la matriz $\overline{A}$ se tiene que $F_2 = -F_1$.

  Por tanto el sistema es compatible indeterminado (Tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro).

b) Los casos en los que el sistema no tiene solución única es para $m = 1$. El sistema será entonces:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$$

Como acabamos de estudiar en el apartado anterior, este sistema tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro. El sistema equivalente con el que nos quedamos (eliminando la segunda ecuación) es:

$$x + y = -1$$

Si tomamos y como parámetro, $y = \lambda$, tenemos que las infinitas soluciones del sistema vendrán dadas por:

$$\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases} \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Si $x = -3$ e $y = 2$ es una solución del sistema, se han de verificar simultáneamente las dos ecuaciones del mismo. Así pues:

$$\begin{cases} -3 + 2m = -1 \\ -3(1 - 2m) - 2 = m \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene:

$$-3 + 2m = -1 \quad \Rightarrow \quad m = 1$$

Para dicho valor, $m = 1$, también se verifica la segunda ecuación, y es por tanto el valor pedido.

2. a) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$, $|\vec{u}| = 1$ y $|\vec{v}| = 2$?
b) Hallar el valor de a para que exista una recta que pase por el punto $P = (1 + a, 1 - a, a)$, corte a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ y sea paralela a la recta $s \equiv \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Solución:

a) Consideremos la definición de producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

Sustituyendo en ella los datos del enunciado, tenemos que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) \quad \Rightarrow \quad -3 = 1 \cdot 2 \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

Despejando en $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$:

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = -\frac{3}{2}$$

Si tenemos en cuenta que para cualquier ángulo α, se ha de cumplir que:

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

es imposible que se cumpla que $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = -\frac{3}{2}$, y por tanto no existen vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tales que cumplan las condiciones dadas.

b) Llamemos t a la recta que buscamos y cumple las condiciones pedidas. Dicha recta, pasa por el punto P, y al ser paralela a la recta s, tendrá como vector director al vector de dirección de esta, $\vec{v_s}$. Si escribimos la recta s en forma de paramétricas, tomando $z = \lambda$, se tiene que:

$$s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$\vec{v_s} = (-1, 0, 1) = \vec{v_t}$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta t pedida vienen dadas por:

$$t \equiv \begin{cases} x = 1 + a - \mu \\ y = 1 - a \\ z = a + \mu \end{cases} \quad \text{con} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Consideremos entonces los vectores directores de las rectas r y t y un vector, $\overrightarrow{RT}$, que una un punto de la recta r, R, con uno de la recta t, T. Escribiendo r en paramétricas, tomando $y = \alpha$:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Por tanto:

$$\vec{v_r} = (-1, 1, 0) \quad ; \quad \vec{v_t} = (-1, 0, 1) \quad ; \quad \overrightarrow{RT} = (1 + a - 2,\ 1 - a,\ a - 1) = (a - 1,\ 1 - a,\ a - 1)$$

Para que las rectas r y t tengan un punto en común, el rango de la matriz formada por estos tres vectores ha de ser 2, y por tanto, el determinante de dicha matriz ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ a-1 & 1-a & a-1 \end{vmatrix} = (a-1) + (1-a) + (a-1) = a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Otra forma de resolver este apartado sería procediendo de la siguiente manera:

Las rectas t y r se cortan, y por tanto tienen un punto en común. Para calcular dicho punto, podemos sustituir las coordenadas de un punto genérico, T, de la recta t en las ecuaciones de la recta r.

$$T = (1 + a - \mu,\ 1 - a,\ a + \mu) \quad \text{y} \quad r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Como $T \in r$, entonces:

$$\begin{cases} 1 + a - \mu + 1 - a = 2 \\ a + \mu = 1 \end{cases}$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de modo que al resolverlo, obtendremos el valor de a buscado.

$$\begin{cases} 1 + a - \mu + 1 - a = 2 \\ a + \mu = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

El valor de a es por tanto, 1, y la recta t tiene por ecuación:

$$t \equiv \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 0 \\ z = 1 + \mu \end{cases} \quad \text{con} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, determinar su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

Solución:

Para la función f dada, el dominio viene dado por:

$$Dom\,(f) = (0, +\infty) - \{1\}$$

ya que el dominio del denominador es $(0, +\infty)$ y además también se anula para el valor $x = 1$.

Calculemos ahora las asíntotas:

a) Asíntotas verticales:
Se pueden presentar en los puntos que no pertenecen al dominio o son frontera del mismo. Por tanto podrá haber asíntotas verticales en $x = 0$ o $x = 1$. Veamos si es así:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{No hay asíntota vertical en } x = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hay asíntota vertical en } x = 1$$

b) Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \xrightarrow{L'Hopital} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \text{No hay asíntota horizontal.}$$

c) Asíntotas oblicuas:
Si existen, serán de la forma $y = mx + n$ $(m \neq 0)$, donde:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$$

deben existir y ser finitos. Calculémoslos:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x/\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Por tanto, no existe asíntota oblicua.

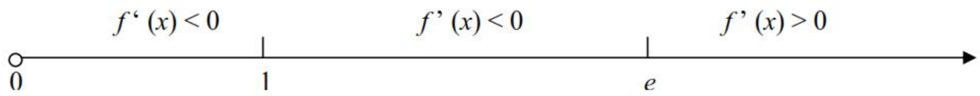
Estudiemos a continuación la monotonía y los extremos a través de la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot 1/x}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

Los puntos singulares son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$. Calculémoslos:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e$$

Si representamos el dominio de la función y el punto singular obtenido, y estudiamos el signo de la derivada primera en cada uno de los intervalos que resultan obtenemos:



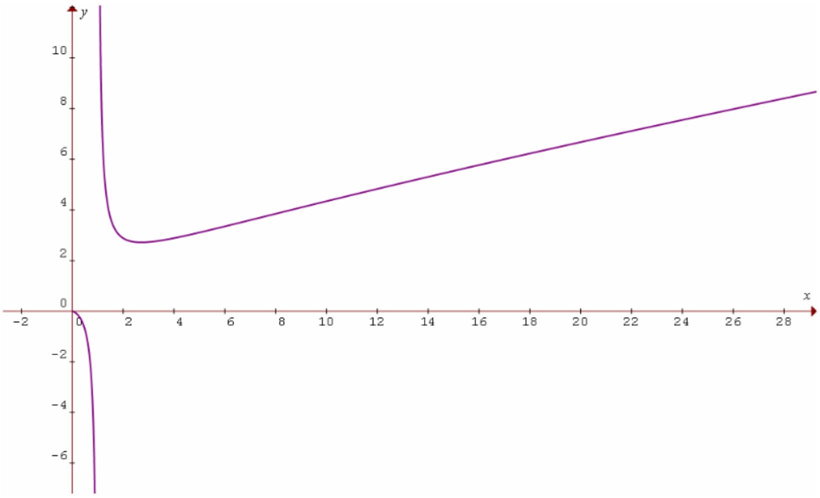
Por tanto, se deduce que:

$$f \text{ es creciente en } (e, +\infty)$$

$$f \text{ es decreciente en } (0, 1) \cup (1, e)$$

$$\text{Mínimo en } x = e \quad \Rightarrow \quad (e, e)$$

Con los datos anteriores, la gráfica de f es:



4. a) Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)} \right)$.

b) Calcular el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y la recta $x = e$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = \infty - \infty$$

Para resolver esta indeterminación, hagamos la resta:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(1+x) - x}{x \cdot \ln(1+x)} \right) = \frac{0}{0}$$

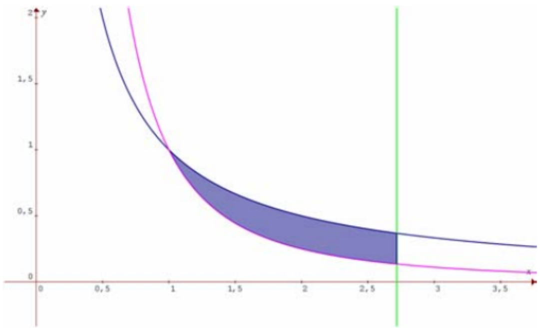
Ahora podemos resolver esta otra indeterminación por la regla de L´Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x\cdot\ln(1+x)}\right)=\xrightarrow{L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{1\cdot\ln(1+x)+x\cdot\dfrac{1}{1+x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{-x}{1+x}}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{-x}{1+x}}{\dfrac{(1+x)\ln(1+x)+x}{1+x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x}{(1+x)\ln(1+x)+x}\right)=\xrightarrow{L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{1\cdot\ln(1+x)+(1+x)\cdot\dfrac{1}{1+x}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{\ln(1+x)+2}\right)=-\frac{1}{2}$$

b) Nos piden el área de la siguiente región:



$f(x)=\dfrac{1}{x}$ es azul

$g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ en rosa

$x=e$ en verde

Calculemos el punto de intersección de f y g:

$$f(x)=g(x)\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}\quad\Rightarrow\quad x^2=x\quad\Rightarrow\quad x^2-x=0\quad\Rightarrow\quad x=0\ \text{ y }\ x=1$$

La solución $x = 0$ no sirve, pues no pertenece al dominio de dichas funciones.

Así pues, el área de la región pedida viene dada por:

$$\text{Área}=\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln|x|+\frac{1}{x}\right]_1^e=\left(\ln e+\frac{1}{e}\right)-(\ln 1+1)=\frac{1}{e}\ u^2$$