	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº páginas: 2

INDICACIONES: **1.- OPTATIVIDAD**: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada ejercicio se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1. Discutir, y resolver cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m \\ 2mx + 2y = m + 1 \end{cases}$$

2. Sea π el plano que pasa por los puntos $A\ (1, -1, 1)$, $B\ (2, 3, 2)$, $C\ (3, 1, 0)$ y r la recta dada por $r \equiv \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y+6}{-1} = \dfrac{z+3}{2}$.
   a) Calcular el ángulo que forman la recta r y el plano π.
   b) Calcular los puntos de r que distan 6 unidades del plano π.

3. Hallar la función polinómica de grado 3 sabiendo que su gráfica pasa por el punto $P\ (1, 0)$, que tiene por tangente en el punto de abscisa $x = 0$ la recta de ecuación $y = 2x + 1$, y que su integral entre 0 y 1 vale 3.

4. Sea la función $f\ (x) = e^{-x^2}$. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.

OPCIÓN B

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix}$.
   a) Discutir su rango en función de los valores de a.
   b) Para $a = 1$, resolver la ecuación matricial $A^t X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

2. Calcular la recta contenida en el plano $\pi_1 \equiv x + y + z = 3$, paralela al plano $\pi_2 \equiv x = 0$, y que pasa por el punto simétrico de $B\,(-1, 1, 1)$ respecto de π_2.

3. Sea la función $f(x) = +2\sqrt{x}$.
   a) Hallar su dominio y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   b) Calcular el punto de la gráfica de $f(x)$ más cercano al punto $(4, 0)$.

4. Sea la función $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
   a) Calcular un punto de su gráfica tal que la recta tangente en dicho punto sea paralela al eje OX. Escribe la ecuación de la recta tangente.
   b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \ln 5$.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Discutir, y resolver cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m \\ 2mx + 2y = m+1 \end{cases}$$

Solución:

Primero discutiremos el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m y después lo resolveremos en los casos en que sea posible. Comencemos considerando la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada $\overline{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \\ 2m & 2 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 2m & 2 & m+1 \end{array}\right)$$

Estudiemos en primer lugar el rango de la matriz $\overline{A}$. Calculemos para ello su determinante.

$$|\overline{A}| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 2m & 2 & m+1 \end{vmatrix} = (m^3 + m^2) + 2m^2 + 2 - 2m^2 - (m+1) - 2m^2 = m^3 - m^2 - m + 1$$

Lo igualamos a cero para calcular los valores de m para los que se anula:

$$m^3 - m^2 - m + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -1 \ \text{ y } \ m = 1 \text{ (doble)}$$

Estudiemos los distintos casos que se presentan:

- Si $m \neq -1$ y $m \neq 1 \Rightarrow$ rango $(\overline{A}) = 3 \neq 2 =$ rango (A). Se comprueba fácilmente que el rango de la matriz A es dos, pues para esos valores del parámetro se puede encontrar un menor de orden dos no nulo, por ejemplo $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$ (Es distinto de cero si $m \neq -1$ y $m \neq 1$). Por tanto, en este caso el sistema es incompatible, no tiene solución.

- Si $m = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$

En este caso, el rango de A es uno, pues las dos últimas filas son proporcionales a la primera ($f_2 = -f_1$ y $f_3 = 2f_1$). Si embargo, la matriz $\overline{A}$ tiene rango dos, pues se puede encontrar en ella al menos un menor de orden dos no nulo, como por ejemplo: $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$. Por tanto, rango $(A) = 1 \neq 2 =$ rango $(\overline{A})$. En este caso el sistema es incompatible, no tiene solución.

- Si $m = 1 \;\Rightarrow\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$

  En este caso para ambas matrices el rango es uno, pues las dos primeras filas son iguales y la tercera es proporcional a las dos anteriores ($f_1 = f_2$ y $f_3 = 2f_1$). Por tanto, rango (A) = rango $(\overline{A}) = 1 < 2 =$ nº incógnitas. En este caso el sistema es compatible indeterminado, esto es, tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

Resolvamos ahora el sistema en el caso $m = 1$, en el que es compatible indeterminado. Como los rangos de A y $\overline{A}$ son uno, nos quedamos únicamente con una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, y tomamos como parámetro a la incógnita y, $y = \lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$x + y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - y = 1 - \lambda$$

Por tanto la solución del sistema es:

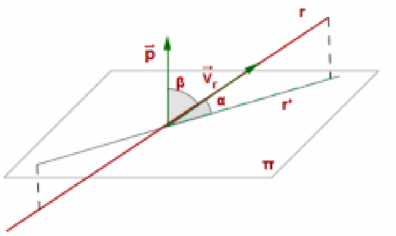
$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases} \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Sea π el plano que pasa por los puntos $A\,(1, -1, 1)$, $B\,(2, 3, 2)$, $C\,(3, 1, 0)$ y r la recta dada por $r \equiv \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y+6}{-1} = \dfrac{z+3}{2}$.
   a) Calcular el ángulo que forman la recta r y el plano π.
   b) Calcular los puntos de r que distan 6 unidades del plano π.

Solución:

a) El ángulo que forman una recta y un plano, α, es igual al complementario del ángulo agudo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano, β. Por tanto, si $\overrightarrow{v_r}$ es el vector director de la recta r, y $\overrightarrow{p}$ el vector característico del plano π, y llamamos α al ángulo pedido, tenemos que:

$$\cos(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{p}) = \cos\beta = \cos(90 - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$$



Calculemos la ecuación del plano π, para saber cual es su vector característico $\vec{p}$. El plano π viene determinado, por ejemplo, por la terna $\pi \equiv (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Entonces, como:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 4, 1) \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{AC} = (2, 2, -1)$$

Se tiene que:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv -6x + 3y - 6z + 15 = 0 \quad \text{o} \quad \pi \equiv -2x + y - 2z + 5 = 0$$

Tenemos entonces que:

$$\vec{v_r} = (2, -1, 2) \qquad \text{y} \qquad \vec{p} = (-2, 1, -2)$$

Así:

$$\text{sen}\ \alpha = \cos(90 - \alpha) = \cos(\vec{v_r}, \vec{p}) =$$

$$= \frac{|\vec{v_r} \cdot \vec{p}|}{|\vec{v_r}| \cdot |\vec{p}|} = \frac{|(2,-1,2)\cdot(-2,1,-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-4-1-4|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{9}{9} = 1$$

El ángulo pedido es $\alpha = \text{arcsen}\ (1) = 90^{\circ}$

Nota: si te fijas en los vectores $\vec{v_r}$ y $\vec{p}$ puedes ver que son proporcionales, y por tanto tienen la misma dirección. Al ser ambos paralelos, la recta r es perpendicular al plano π.

b) Para calcular los puntos de r que distan 6 unidades del plano π, procederemos del siguiente modo:

- Calculamos las ecuaciones paramétricas de la recta r, para así saber las coordenadas genéricas de un punto cualquiera, R, de la misma.
- Calcularemos la distancia del punto genérico R de la recta r calculado, al plano π.
- Impondremos que dicha distancia sea igual a 6 unidades de longitud.
- Calcularemos las coordenadas del punto o puntos buscados.

Procedamos. Para calcular las ecuaciones paramétricas de la recta r, tomemos $y = \lambda$:

$$r \equiv \begin{cases} x = -5 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -15 - 2\lambda \end{cases}$$

Las coordenadas genéricas de un punto cualquiera, R, son: $R = (-5 - 2\lambda, \lambda, -15 - 2\lambda)$.

Calculamos la distancia del punto R al plano π:

$$d(R, \pi) = \frac{|(-2)\cdot(-5-2\lambda)+\lambda-2\cdot(-15-2\lambda)+5|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{|45+9\lambda|}{\sqrt{9}} = |15+3\lambda|$$

Imponemos que dicha distancia sea igual a 6:

$$|\,15 + 3\lambda\,| = 6 \quad \Rightarrow \quad |\,5 + \lambda\,| = 2$$

De aquí obtenemos dos posibles soluciones:

$$5 + \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -3 \quad \Rightarrow \quad R_1 = (1, -3, -9)$$

$$5 + \lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -7 \quad \Rightarrow \quad R_2 = (9, -7, -1)$$

3. Hallar la función polinómica de grado 3 sabiendo que su gráfica pasa por el punto $P\,(1, 0)$, que tiene por tangente en el punto de abscisa $x = 0$ la recta de ecuación $y = 2x + 1$, y que su integral entre 0 y 1 vale 3.

Solución:

Consideremos una función polinómica de grado 3: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Debemos calcular sus coeficientes a, b, c y d para determinarla. Para ello hacemos uso de los datos de enunciado y las consecuencias que se pueden extraer de él:

- Su gráfica pasa por el punto $P\,(1, 0)$, o lo que es lo mismo $f(1) = 0$.
- Tiene por tangente en el punto de abscisa $x = 0$ la recta de ecuación $y = 2x + 1$. Entonces, como la pendiente de la recta es igual al valor de la derivada de la función en el punto de tangencia se tiene que: $f\,'(0) = 2$
- Por otra parte, el punto de tangencia pertenece tanto a la función f, como a la recta tangente. La abscisa del punto de tangencia es $x = 0$, y sustituyendo en la ecuación de la recta tangente se obtiene su ordenada, que resulta ser $y = 1$ ($y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$). Así pues el punto de tangencia es $T\,(0, 1)$. Por tanto, tenemos que $f(0) = 1$.
- Finalmente, se tiene que $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d)dx = 3$.

Procedamos pues a traducir las conclusiones anteriores a ecuaciones matemáticas:

- $f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b + c + d = 0$
- Como $f\,'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y $f\,'(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 2$
- $f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 1$
- $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d)dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx\right]_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = 3$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ c &= 2 \\ d &= 1 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d &= 3 \end{aligned}$$

Ya tenemos el valor de dos coeficientes y sustituyéndolos en la primera y última ecuación tenemos que:

$$\begin{aligned} a + b &= -3 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{3} &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se obtiene que $a = -24$ y $b = 21$.

Por tanto la función pedida es:

$$f(x) = -24x^3 + 21x^2 + 2x + 1$$

4. Sea la función $f(x) = e^{-x^2}$. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.

Solución:

En primer lugar, tengamos en cuenta que su dominio es: $D(f) = \mathbb{R}$.

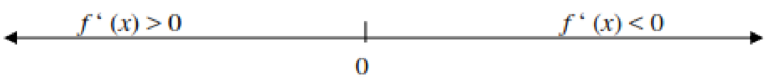
Estudiemos ahora la monotonía. Calculemos su derivada primera:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

Igualémosla a cero para calcular sus puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2xe^{-x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Representemos sobre la recta real dicho punto, y estudiemos el signo de la derivada primera en cada uno de los intervalos en que queda dividida:



Por tanto, se deduce que f crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.

Como se observa en el estudio de la monotonía, en el punto singular $x = 0$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, y por tanto en dicho punto singular la función presenta un máximo:

Máximo en (0, 1)

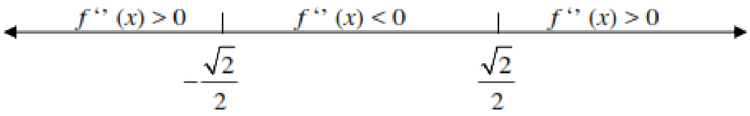
Estudiemos ahora la curvatura. Calculemos su derivada segunda:

$$f''(x) = (-2+4x^2)e^{-x^2}$$

Igualémosla a cero para calcular las abscisas donde puede haber puntos de inflexión:

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (-2+4x^2)e^{-x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Representemos sobre la recta real dichos puntos, y estudiemos el signo de la derivada segunda en cada uno de los intervalos en que queda dividida:



Por tanto, se deduce que f es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Como se observa en el estudio de la curvatura, en el punto de abscisa $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ la función pasa de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo y en el punto de abscisa $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ la función pasa de ser cóncava hacia abajo a ser cóncava hacia arriba y por tanto en ellos hay puntos de inflexión:

$$\text{Puntos de inflexión en } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right) \text{ y } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Calculemos ahora las asíntotas:

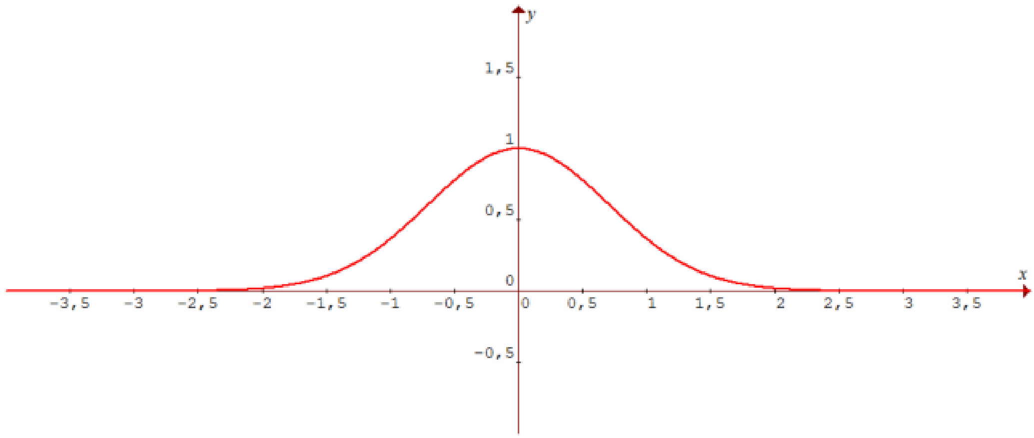
- Asíntotas verticales no hay pues su domino es $\mathbb{R}$.
- Asíntotas horizontales:

$$\underset{x\to\pm\infty}{Lim} f(x) = \underset{x\to\pm\infty}{Lim} e^{-x^2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por tanto hay una asíntota horizontal si $x \to \pm\infty$, cuya ecuación es $y = 0$.

- Asíntotas oblicuas: No hay pues existen asíntotas horizontales y ambas son excluyentes.

Con los datos anteriores, podemos esbozar la gráfica de la función:



OPCIÓN B

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix}$.

   a) Discutir su rango en función de los valores de a.

   b) Para $a = 1$, resolver la ecuación matricial $A^t X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) Para estudiar el rango de esta matriz, comencemos por calcular su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{vmatrix} = (a^3 + 9a^2 + 18a) + (a^3 + 5a^2 + 4a) + (a^3 + 7a^2 + 10a) -$$
$$-(a^3 + 5a^2 + 6a) - (a^3 + 7a^2 + 6a) - (a^3 + 9a^2 + 20a) = 0$$

Por tanto, el rango de la matriz A no puede ser 3. Busquemos un menor de orden 2 no nulo. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 \end{vmatrix} = (a^2 + 5a + 4) - (a^2 + 5a + 6) = -2 \neq 0$$

Por tanto, el rango de la matriz A es dos, independientemente del valor del parámetro a.

b) Para $a = 1$ las matrices A y A^t son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Debemos tener en cuenta que el rango de ambas matrices es dos y por tanto a la hora de resolver la ecuación matricial $A^t X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, no podemos multiplicar por la izquierda por $(A^t)^{-1}$, pues no existe.

Escribamos esta ecuación matricial en forma de sistema (homogéneo), considerando $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$A^t X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

En este sistema homogéneo la matriz de los coeficientes, A^t, es de rango dos y por tanto el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. Nos quedaremos con las dos primeras ecuaciones y tomaremos como parámetro a z, $z = \lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{cases} x + y = -\lambda \\ 2x + 4y = -6\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = -\lambda \\ x + 2y = -3\lambda \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos como solución:

$$x = \lambda \quad \text{e} \quad y = -2\lambda$$

Así, existen infinitas matrices X, que son de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

2. Calcular la recta contenida en el plano $\pi_1 \equiv x + y + z = 3$, paralela al plano $\pi_2 \equiv x = 0$, y que pasa por el punto simétrico de $B\,(-1, 1, 1)$ respecto de π_2.

Solución:

Si tenemos en cuenta que la recta r que buscamos está contenida en el plano π_1 y es paralela al plano π_2, entonces el vector director de la misma, $\overrightarrow{v_r}$, será perpendicular a los vectores característicos de ambos planos, $\overrightarrow{p_1}$ y $\overrightarrow{p_2}$ respectivamente. Así pues, $\overrightarrow{v_r}$ será el producto vectorial de $\overrightarrow{p_1}$ y $\overrightarrow{p_2}$. Como tenemos que:

$$\overrightarrow{p_1} = (1, 1, 1) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{p_2} = (1, 0, 0)$$

entonces:

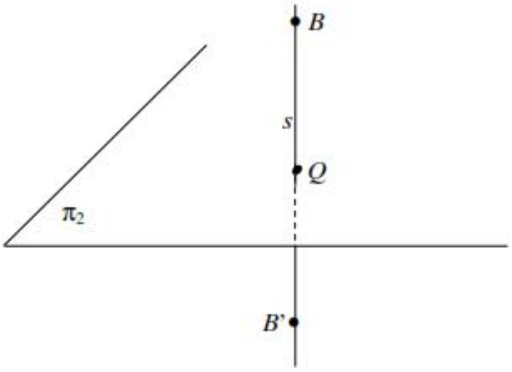
$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{p_1} \wedge \overrightarrow{p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j} - \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v_r} = (0, 1, -1)$$

Además, debemos conocer un punto por el que pase la recta r buscada. Este será el punto B', simétrico de $B\,(-1, 1, 1)$ respecto de π_2. Calculémoslo. Para ello, procederemos de la siguiente manera:

- Hallamos la recta s, que contenga al punto B y que sea perpendicular al plano π_2. Dicha recta tendrá como vector director, $\overrightarrow{v_s}$, al vector característico del plano, $\overrightarrow{p_2}$. Además esta recta contendrá al punto B', simétrico de B respecto al plano π_2.

- Calculamos el punto Q de intersección del plano π_2 con la recta s. Dicho punto Q es el punto medio del segmento de extremos B y su simétrico B'.

- Finalmente, y teniendo en cuenta lo anterior, calculamos B'.



Procedamos. Un vector director de la recta s, es $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{p_2} = (1, 0, 0)$. Las ecuaciones paramétricas de la recta s serán por tanto:

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Calculemos a continuación el punto Q de intersección de la recta anterior, s, y el plano π_2. Para ello, sustituyamos las ecuaciones paramétricas de s en la ecuación del plano π_2:

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -1 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

Por tanto las coordenadas del punto Q son: $Q = (-1 + 1, 1, 1) = (0, 1, 1)$

Como el punto Q es el punto medio del segmento de extremos B y su simétrico $B' = (a, b, c)$, entonces se ha de cumplir que:

$$0 = \frac{-1+a}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 1$$
$$1 = \frac{1+b}{2} \quad \Rightarrow \quad b = 1$$
$$1 = \frac{1+c}{2} \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

El punto simétrico de B respecto al plano π_2 es $B' = (1, 1, 1)$.

Por tanto, la recta r que buscamos pasa por el punto $B' = (1, 1, 1)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{v_r} = (0, 1, -1)$. Entonces, dicha recta tendrá por ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \mu \\ z = 1 - \mu \end{cases} \quad \text{con} \quad \mu \in \mathbb{R} \qquad \text{o} \qquad r \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

3. Sea la función $f(x) = +2\sqrt{x}$.
   a) Hallar su dominio y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   b) Calcular el punto de la gráfica de $f(x)$ más cercano al punto $(4, 0)$.

Solución:

a) El dominio de la función estará formado por aquellos valores de x que hagan el radicando positivo o nulo ($x \geq 0$), lo que se calcula fácilmente y es: $D(f) = [0, +\infty)$.

Estudiemos ahora la monotonía. Calculemos su derivada primera:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Igualémosla a cero para calcular sus puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{No tiene raíces reales}$$

Representemos sobre una recta el dominio de la función y los puntos donde no es derivable y estudiemos el signo de la derivada primera en él:

$f'(x) > 0$

0

Por tanto, se deduce que f crece en $(0, +\infty)$.

b) Para calcular el punto de la gráfica de $f(x)$ más cercano al punto $P(4, 0)$, consideremos que un punto F de la gráfica de f tendrá por coordenadas $(x, +2\sqrt{x})$. Así, la distancia entre P y F vendrá dada por:

$$d(P, F) = d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

Como buscamos el punto F más cercano a P, esta distancia ha de ser mínima. Calculemos pues el mínimo de la función $d(x)$. Para ello, tengamos en cuenta que su dominio es todo $\mathbb{R}$, pues el radicando siempre es positivo (como se puede comprobar fácilmente) y calculemos su derivada primera:

$$d'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}}$$

Si la igualamos a cero para calcular los puntos singulares obtenemos que:

$$d'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

Representemos sobre la recta real dicho punto, y estudiemos el signo de la derivada primera en cada uno de los intervalos en que queda dividida:

$f'(x) < 0$ | 2 | $f'(x) > 0$

Como se observa en el estudio de la monotonía, en el punto singular x = 2 la función pasa de ser decreciente a ser creciente, y por tanto en dicho punto singular la función presenta un mínimo. Así pues, el punto F de la gráfica de $f(x)$ más cercano al punto P (4, 0) es:

$$F\,(2,\, 2\sqrt{2}\,)$$

4. Sea la función $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
    a) Calcular un punto de su gráfica tal que la recta tangente en dicho punto sea paralela al eje OX. Escribe la ecuación de la recta tangente.
    b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \ln 5$.

Solución:

a) En primer lugar tengamos en cuenta que las rectas paralelas tienen igual pendiente y por tanto la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ debe tener la misma pendiente que el eje OX, es decir, cero. Por otra parte debemos saber que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función coincide con la derivada de la función en el punto de tangencia. De ello deducimos que si x_0 es el punto de tangencia se ha de cumplir que:

$$f'(x_0) = 0$$

Por tanto, como:

$$f'(x) = \frac{e^x\cdot(1+e^x)^2 - e^x\cdot 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x\cdot(1+e^x) - e^x\cdot 2e^x}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

entonces:

$$f'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{x_0}(1-e^{x_0})}{(1+e^{x_0})^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{x_0}(1-e^{x_0}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0$$

Por tanto, el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la recta tangente en dicho punto es paralela al eje OX es:

$$(x_0, f(x_0)) = \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

En este caso la recta tangente es:

$$y - f(0) = f'(0)\,(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y - \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}$$

b) El área pedida es la de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \ln 5$. Se comprueba fácilmente que la función f no corta al eje OX, y por tanto dicha área viene dada por:

$$\acute{A}rea = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$

Para calcular esta integral hagamos el siguiente cambio de variable:

$$1 + e^x = t \quad \Rightarrow \quad e^x\,dx = dt$$

Además:

- Si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$
- Si $x = \ln 5 \quad \Rightarrow \quad t = 1 + e^{\ln 5} = 1 + 5 = 6$

Por tanto:

$$\acute{A}rea = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \int_2^6 \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^6 = \left[\left(-\frac{1}{6}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\ u^2$$