PRODUCTO DE VECTORES

PRODUCTO VECTORIAL

expresión analítica

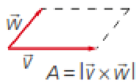
$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

propiedades

1. $\vec{v} \times \vec{v} = -\vec{w} \times \vec{v}$
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
3. $(t\vec{v}) \times \vec{w} = t(\vec{v} \times \vec{w})$
4. $\vec{v} \times \vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$ **y** $\vec{w}$

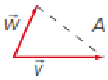
aplicaciones

- VECTOR DIRECTOR DE UNA RECTA
- ÁREA DEL PARALELOGRAMO



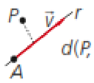
$A = |\vec{v} \times \vec{w}|$

- ÁREA DEL TRIÁNGULO



$A = \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}|$

- DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA



$d(P, r) = \dfrac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}$

PRODUCTO MIXTO

expresión analítica

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

aplicaciones

- VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO: $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ → VOLUMEN DEL TETRAEDRO: $V = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$
- DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

$r: P, \vec{v}_r$

$s: Q, \vec{v}_s$

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{v}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{v}_s \times \vec{v}_r|}$$

SUPERFICIE ESFÉRICA

- Ecuación $d(P, C) = r$
- Aplicaciones

ACTIVIDADES RESUELTAS ACCESO UNIVERSIDAD

Encuentra las ecuaciones de una recta que sea paralela a los planos α: $3x + y - 2z - 2 = 0$, α': $-2x + z = 10$, y que pase por el origen de coordenadas.

La recta, al ser paralela a los planos dados, es paralela a la recta en la que estos se cortan; por tanto, viene determinada por el punto $O(0, 0, 0)$ y el vector director

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

Luego las ecuaciones de la recta son: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$

Otra forma de determinarla es como la intersección de los planos paralelos a los dados α y α' que pasan por el origen.

Es decir: $\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases}$

Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1, 2, -1)$, es paralela al plano $2x + y - z = 3$ y es perpendicular a la recta intersección de los planos: $\begin{cases} 3y + z = 7 \\ x + 4y + z = 8 \end{cases}$

El vector direccional de la recta buscada debe ser perpendicular a los vectores:

$$\vec{u} = (2, 1, -1) \text{ y } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$

Dicho vector es: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (-2, 7, 3)$. Como la recta pasa por el punto $(1, 2, -1)$, sus ecuaciones continuas son:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+1}{3}$$

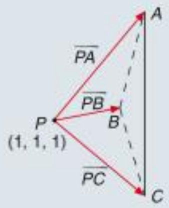
Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = -3 \end{cases}$ y pasa por el punto $(3, 2, 1)$.

Todos los planos perpendiculares a la recta dada tienen como vector normal

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{j} - 3\vec{k}. \text{ Es decir: } \vec{v} = (0, 1, 1)$$

Todos los planos perpendiculares a la recta dada responden a la expresión $y + z + D = 0$. El plano de todos los anteriores, que pasa por el punto $(3, 2, 1)$, cumple $D = -3$. Es decir, la ecuación del plano buscado es: $y + z - 3 = 0$.

Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el punto $(1, 1, 1)$ y los puntos en los que el plano $2x + y + z = 2$ corta los ejes coordenados.

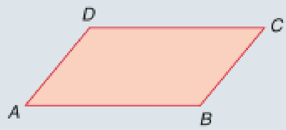


Los vértices del tetraedro son $P(1, 1, 1)$; $A(1, 0, 0)$; $B(0, 2, 0)$; $C(0, 0, 2)$.

Luego el volumen del tetraedro es:

$$\text{Volumen tetraedro} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|-4| = \frac{2}{3} \text{ u}^3$$

Tres vértices consecutivos de un paralelogramo *ABCD* son los puntos *A*(1, 1, 0), *B*(0, 1, 1) y *C*(−1, 0, 1). Halla el cuarto vértice y el área del paralelogramo.



Por ser un paralelogramo se verifica que las diagonales *AC* y *BD* se cortan en el punto medio; por tanto, el punto medio de *AC*, que es (0, 1/2, 1/2), es el punto medio de *BD*. De donde el vértice *D* tiene de coordenadas (0, 0, 0).

El área del paralelogramo viene dada por:

$$\text{Área} = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\| = \sqrt{3}\ \text{u}^2$$

Comprueba que los puntos *A*(1, 1, 1), *B*(0, −1, 0) y *C*(2, 3, 0) forman un triángulo. Halla el área de dicho triángulo.

Los puntos *A*, *B* y *C* forman un triángulo, ya que el punto *C*(2, 3, 0) no pertenece a la recta determinada por *A* y *B*, al cumplirse:

$$\frac{2-1}{0-1} \neq \frac{3-1}{-1-1} \neq \frac{0-1}{0-1}$$

El área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C* es:

$$\text{Área}\ (ABC) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(-1, -2, -1) \times (1, 2, -1)| = 2{,}236\ \text{u}^2$$

Calcula el área y el volumen del tetraedro de vértices: *A*(2, 3, 1), *B*(4, 1, −2), *C*(6, 3, 7) y *D*(−5, −4, 8).

El área del tetraedro es la suma de las áreas de los triángulos que forman sus caras.

Estas áreas son:

$$A(ABC) = 14; \quad A(ABD) = 22{,}68; \quad A(ACD) = 43{,}15 \quad \text{y} \quad A(BCD) = 60{,}19$$

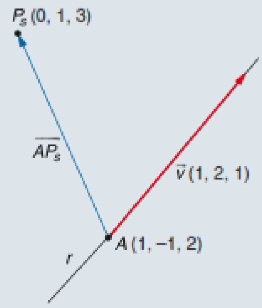
El área total del tetraedro es:

$$\text{Área}\ (ABCD) = 140{,}02\ \text{u}^2$$

El volumen del tetraedro de vértices *A*, *B*, *C* y *D* viene dado por:

$$\text{Vol} = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{matrix} \right\| = 51{,}33\ \text{u}^3$$

Calcula el área del cuadrado cuyos dos lados están sobre las rectas:



$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \qquad \text{y} \qquad s: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

Las rectas *r* y *s* son paralelas. La longitud del lado del cuadrado es la distancia entre las dos rectas anteriores. Esta distancia viene dada por:

$$d(r, s) = d(P_s, r) = \frac{|\overrightarrow{AP_s} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|(-1, 2, 1) \times (1, 2, 1)|}{|(1, 2, 1)|} = \frac{|(0, 2, -4)|}{|(1, 2, 1)|} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = 1{,}826$$

Siendo la longitud del lado del cuadrado 1,826, su área valdrá 3,333 u².

ACTIVIDADES FINALES

1. En $\mathbb{R}^3$ consideramos los vectores $\vec{u} = (2, 1, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 3)$ y $\vec{w} = (3, 0, 2)$. Halla:

   a) $\vec{u} \times \vec{v}$ b) $\vec{v} \times \vec{u}$ c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ d) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

2. Los vectores $\vec{u} = (2, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 2)$ y $\vec{w} = (0, 2, 1)$, ¿forman base de $\mathbb{R}^3$? ¿Y los vectores $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w} \times \vec{u}\}$?

3. Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $|\vec{v}| = 3$, $|\vec{w}| = 4$, y $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$. Halla $|\vec{v} \times \vec{w}|$.

4. Tres vértices de un paralelogramo ABCD son los puntos de coordenadas $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 1)$ y $C(2, -1, 2)$. Halla las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo.

5. El plano de ecuación $2x - 3y + z + 6 = 0$ corta a los ejes coordenados en tres puntos que son los vértices de un triángulo. Halla su área.

6. Halla un vector director de la recta que, siendo paralela a los planos $2x - 3y + z - 5 = 0$, $x + 2y - 3z + 4 = 0$, pase por el punto $P(1, 2, 3)$. Escribe, como intersección de dos planos, la ecuación de esta recta.

7. Halla la distancia del punto $M(1, 4, -1)$ a cada una de las siguientes rectas:

   a) $r \equiv \begin{cases} x - y - z + 3 = 0 \\ 3x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ b) $s \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = -z$

8. Halla la distancia entre las rectas de ecuaciones: $r \equiv \begin{cases} x - z = -2 \\ y - z = -4 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

9. Sean los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\vec{u} = (1, 3, -2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 2, 0)$. Halla:

   a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

10. Halla la ecuación de la recta paralela al plano de ecuación $x - y - 2z + 12 = 0$ y que sea perpendicular a la recta r en el punto en el que esta se corta con el plano OYZ siendo $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ x + 4z = -4 \end{cases}$.

11. El plano mediatriz del segmento de extremos $A(3, 1, 5)$ y $B(-1, 7, 3)$ corta a los ejes coordenados determinando con el origen de coordenadas un tetraedro. Halla su volumen.

12. Halla el área del cuadrado que tiene dos de sus lados sobre las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 2y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

13. a) Estudia, según los valores de a, la posición relativa de las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv x - 1 = 2 - y = z \text{ y } s \equiv \begin{cases} x = a + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2a + t \end{cases}$$

   b) Para $a = 3$ halla la distancia entre ellas.

■ 14. Halla la ecuación de la perpendicular común a las rectas $r = \frac{x+1}{3} = y - 2 = z$ y $s = \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -2t \end{cases}$

■ 15. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, 0, 0)$, es paralela al plano $3x - y + z = 2$ y es perpendicular a la recta $r = \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$.

■ 16. Halla un punto de la recta de ecuación $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$ que forme con los puntos $B(1, 1, 1)$ y $C(12, -1, 1)$ un triángulo de área 50 unidades cuadradas.

■ 17. Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + a(y - 2) \\ x = z \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ ax - z = 2a - 2 \end{cases}$$

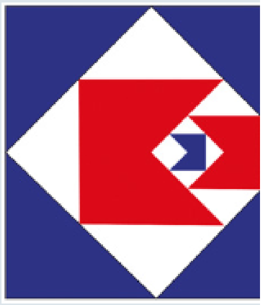
a) Averigua su posición relativa según los valores de a.

b) Tomando $a = 0$, determina los puntos $P \in r$ y $Q \in s$ tales que la distancia entre P y Q sea mínima.

■ 18. Halla la ecuación de la recta que se apoya en el eje OZ, en la recta $s = \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$ y es perpendicular a ellas.

■ 19. Halla el volumen del paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ siendo $A(6, 0, 0)$, $B(6, 6, 0)$, $C(0, 6, 0)$ y $E(6, 6, 6)$.

■ 20. Un cuadrado tiene dos vértices en los puntos $P(2, 1, 3)$ y $Q(1, 3, 1)$; los otros sobre una recta r que pasa por el punto $R(-4, 7, -6)$.



a) Calcula la ecuación de la recta r.

b) Calcula la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

c) Halla las coordenadas de uno de los dos vértices.

■ 21. Halla, en cada uno de los apartados siguientes, la ecuación de la superficie esférica que:

a) Tiene por centro el punto $C(-2, 3, 5)$ y radio 4 unidades.

b) Uno de sus diámetros es el segmento de extremos $P(7, 0, 2)$ y $Q(3, 2, 6)$

c) Es concéntrica con la de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z = 2$ y tangente al plano de ecuación $x - 2y - z + 6 = 0$.

d) Pasa por los puntos $A(5, -1, 2)$, $B(0, -1, -3)$, $C(3, 3, 2)$ y $D(4, -1, -1)$.

■ 22. Halla el volumen de la esfera tangente a los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 = 2x - 2y + z = 3 \quad \text{y} \quad \pi_2 = x - y + \frac{1}{2}z = 6.$$

■ 23. Sea la esfera de ecuación $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 4y + 12z + 4 = 0$. ¿El plano de ecuación $x - y - z + 7 = 0$ es tangente, secante o exterior a la esfera?

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. Halla el valor de m para que el tetraedro de vértices el origen de coordenadas y los puntos en los que el plano $6x + 3y + z + m = 0$ corta a los ejes coordenados tenga 2 unidades cúbicas de volumen.

2. Se considera el plano de ecuación $x - 2y + 3z + 9 = 0$ y en él un punto P de coordenadas $(1, 2, -2)$. Sea Q la proyección del punto $R(1, 1, 2)$ sobre el plano dado. Halla el área del triángulo PQR.

3. ¿Para qué valor de a la recta de ecuación $\begin{cases} x + 3y - z = 3 \\ 3x + ay + z = 1 \end{cases}$ está contenida en el plano $x + y + z + 1 = 0$?

4. Sea el cuadrado de centro el punto $C(1, 1, -1)$ y uno de cuyos lados está en la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$. Halla el plano en el que se encuentran el cuadrado y el área del mismo.

5. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - 3z = 6 \\ y - z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 1$. Halla la ecuación de la recta contenida en el plano π dado, que pase por el punto $P(1, 2, -1)$ y corte a la recta r perpendicularmente.

6. Dos vértices de un triángulo ABC son los puntos $A(0, 3, 2)$ y $B(-1, 1, 1)$. El vértice C es el punto de corte de la recta que pasando por A corta perpendicularmente a $r \equiv \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$. Halla este vértice C y el área del triángulo.

7. Halla las coordenadas del punto B de la recta $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas O y del punto $A(-4, 2, 2)$.

8. a) Estudia, según los valores de m, la posición relativa de las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + mt \\ z = 1 + 2mt \end{cases}$ $t \equiv$ eje OZ.

   b) Para $m = 1$, halla la perpendicular común a s y a t.

   c) Para $m = -2$, halla la distancia entre estas rectas s y t.

9. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta:

$$x = \frac{y+3}{2} = 2 - z$$

10. Sean los vectores $\vec{u} = (b, -1, 4)$ y $\vec{v} = (1, 3, a)$.

   a) Halla a y b para que esos vectores sean ortogonales, y el módulo del primero sea $\sqrt{42}$.

   b) Para $a = 0$ y $b = 5$, halla el área del paralelogramo que tiene estos vectores por lados.

11. Halla el área del tetraedro de vértices $A(0, 3, 3)$, $B(3, 0, 3)$, $C(3, 3, 0)$ y $D(3, 3, 3)$.