4 Programación lineal

4 Programación lineal

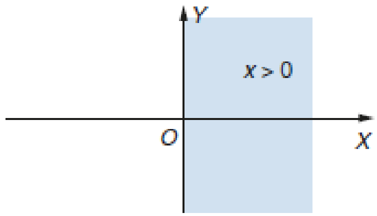
1. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

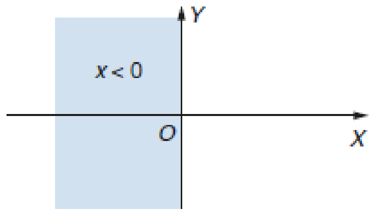
- Una inecuación de primer grado con dos incógnitas es una desigualdad algebraica que se puede transformar en otra equivalente a una de las siguientes formas:
  - $ax + by > c$
  - $ax + by \geq c$
  - $ax + by < c$
  - $ax + by \leq c$

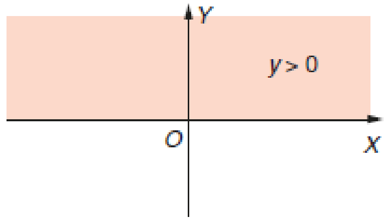
- Resolución de la inecuación de primer grado con dos incógnitas:
  1. Representamos gráficamente la función afín o lineal:
     $$ax + by = c$$
     asociada a la inecuación, y obtenemos la recta correspondiente.
  2. La recta divide el plano en dos semiplanos. Discutimos cuál de los semiplanos es solución utilizando un punto y estudiando si verifica o no la inecuación.
  3. Estudiamos la inclusión o no de la recta o frontera en la solución:
     - En las inecuaciones del tipo:
       - $ax + by > c$
       - $ax + by < c$

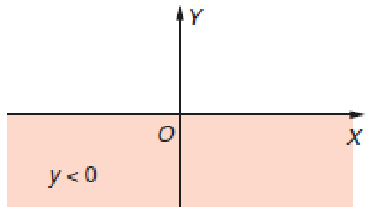
       no se incluye la recta o frontera.
     - En las inecuaciones del tipo:
       - $ax + by \geq c$
       - $ax + by \leq c$

       se incluye la recta o frontera.









1. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

1.1. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

- Un sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas es un conjunto de inecuaciones de primer grado de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \end{cases}$$

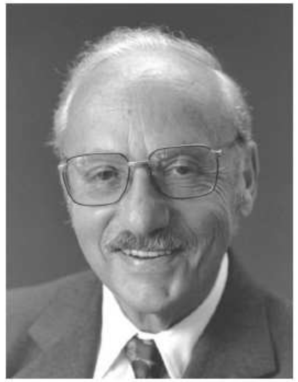
El conjunto solución de un sistema de inecuaciones está formado por las soluciones que verifican a la vez todas las inecuaciones. Al conjunto solución también se le llama región factible.

Para **resolver un sistema de inecuaciones** se procede de la siguiente manera:

- Se resuelve cada inecuación por separado, indicando en cada una de ellas, mediante unas flechas o sombreando, el semiplano solución.
- El conjunto solución o región factible está formado por las soluciones comunes a todas las inecuaciones.

- La programación lineal es un conjunto de técnicas que pretende optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal de varias variables llamada función objetivo sujeta a una serie de restricciones expresadas por medio de ecuaciones o inecuaciones lineales.

George B. Dantzig (1914-2005)



Los programas lineales más habituales se expresan de una de las siguientes formas:

- **Maximizar una función**
- **Minimizar una función**

En los programas lineales llamamos:

- **Variables de decisión** a los términos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- **Restricciones** a las inecuaciones lineales expresadas en las variables de decisión.
- **Función objetivo** a la función *z*, función lineal que hay que optimizar.
- **Región factible** o conjunto de soluciones que verifican todas las restricciones. Puede ser acotada o no.
- **Solución óptima** o conjunto de valores de las variables que verifican todas las restricciones y optimizan la función objetivo.

Programación lineal

2. Programación lineal

2.1. Clases de programas lineales

Los programas lineales suelen clasificarse atendiendo al tipo de solución que presentan. Estos pueden ser:

Factibles, si existe el conjunto de soluciones o valores que satisfacen las restricciones. A su vez, pueden ser:

— **Con solución única**, si existe una única solución óptima.

— **Con solución múltiple**, si existe más de una solución óptima.

No factibles, cuando no existe el conjunto de soluciones que cumplen las restricciones, es decir, las restricciones son inconsistentes.

Elementos de un programa lineal

Productos / Factores	P_1 P_2 ... P_n	Recursos
F_1	a_{11} a_{12} ... a_{1n}	b_1
F_2	a_{21} a_{22} ... a_{2n}	b_2
...	....	...
F_m	a_{m1} a_{m2} ... a_{mn}	b_m
Beneficios o costes	c_1 c_1 ... c_n	
Producción	x_1 x_1 ... x_n	

2.2. Etapas en la formulación de un programa lineal

Con objeto de simplificar la formulación de un programa lineal, es conveniente realizar el planteamiento algebraico de un enunciado a través de los pasos o etapas siguientes:

1. **Recoger la información** relativa a los elementos del problema **en una tabla**, como la que figura en el margen.

2. **Determinar las variables de decisión** y darles nombre.

3. **Escribir las restricciones**, expresadas como inecuaciones lineales de las variables de decisión.

4. **Expresar analíticamente la función objetivo**, función lineal de las variables de decisión, que hay que optimizar.

- Un programa lineal en dos variables x e y viene formulado de una de las siguientes formas:
  - Maximizar la función objetivo $z = c_1x + c_2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ a_{11}x + a_{12}y \leq b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x + a_{m2}y \leq b_m \end{cases}$$

  - Minimizar la función objetivo $z = c_1x + c_2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ a_{11}x + a_{12}y \geq b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y \geq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x + a_{m2}y \geq b_m \end{cases}$$

- Si existe **una única solución** que optimice la función objetivo, esta se encuentra en un **vértice de la región factible** acotada, nunca en el interior de la misma. Esta propiedad se conoce con el nombre de *principio de las esquinas*.
- Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices, también toma idéntico valor en los puntos del segmento que determinan esos vértices. En este caso, el programa tiene **solución múltiple**.
- Si la región factible no está acotada, el programa lineal puede carecer de solución, pero si existe solución esta se encuentra en los vértices de la región factible.

Veamos a continuación dos métodos para resolver este tipo de programas lineales: **método analítico** y **método gráfico.**

Para encontrar las soluciones de un problema de programación lineal en dos variables por el **método analítico** hemos de seguir los siguientes pasos:

- Formular el programa lineal siguiendo estas etapas: hacer **una tabla**, determinar **las variables**, escribir **las restricciones** y encontrar la función objetivo.
- Representar la **región factible** y encontrar los **vértices** de la misma resolviendo los sistemas de ecuaciones asociadas a las restricciones.
- Calcular el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible y determinar el que la optimiza, es decir, la **solución óptima**.

3. Programación lineal para dos variables. Métodos de resolución

3.2. Método gráfico

Para encontrar las soluciones de un problema de programación lineal en dos variables por el **método gráfico** hemos de seguir los siguientes pasos:

- Formular el programa lineal, siguiendo estas etapas: hacer **una tabla,** determinar **la variables,** escribir **las restricciones** y encontrar la función objetivo.
- Representar la **región factible** y encontrar los **vértices** de la misma resolviendo los sistemas de ecuaciones asociadas a las restricciones.
- Representar la **recta de beneficio nulo**, $c_1x + c_2y = 0$, correspondiente a la función objetivo de valor cero, $z = 0$.
- Recorrer la región factible con las **líneas de nivel** $c_1x + c_2y = k$, rectas paralelas a la recta de beneficio nulo.
- De todas estas líneas, buscar la que da lugar al valor óptimo de la función objetivo, que pasará por un vértice de la región factible.
- **Discusión de la solución óptima** pudiéndonos encontrar con uno de los siguientes siguientes.

4

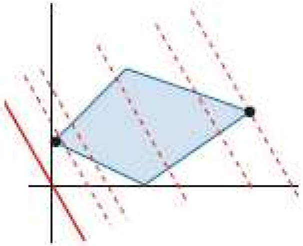
Programación lineal

3. Programación lineal para dos variables. Métodos de resolución

3.2. Método gráfico

CASO 1

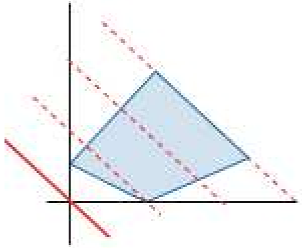
MAXIMIZAR
Y MINIMIZAR



↑ Región factible
acotada
con solución única

CASO 2

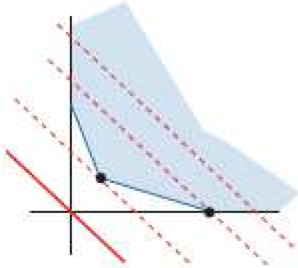
MAXIMIZAR MÚLTIPLE
MINIMIZAR ÚNICO



↑ Región factible
acotada
con solución múltiple

CASO 3

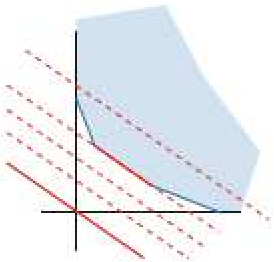
MINIMIZAR
ÚNICO



↑ Región factible
no acotada
con solución única

CASO 4

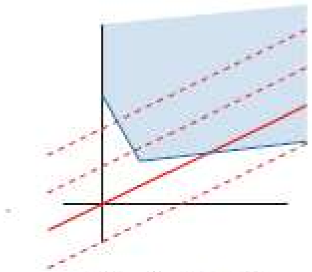
MINIMIZAR
MÚLTIPLE



↑ Región factible
no acotada
con solución múltiple

CASO 5

NINGUNA



↑ Región factible
no acotada
y sin solución

4. El problema del transporte

Un problema particular que se resuelve con los procedimientos de la programación lineal es la situación conocida como **problema del transporte** o **problema de la distribución de mercancías.**

- El objetivo de todo problema de transporte es determinar cuántas unidades de producto deben enviarse desde cada origen hasta cada destino de forma que se minimicen los costes totales de distribución, se satisfaga la demanda de cada destino y no se exceda la capacidad de oferta de cada uno de los orígenes.

Destinos / Orígenes	1	2	…	n	Ofertas
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
Demandas	b_1	b_2	…	b_n	