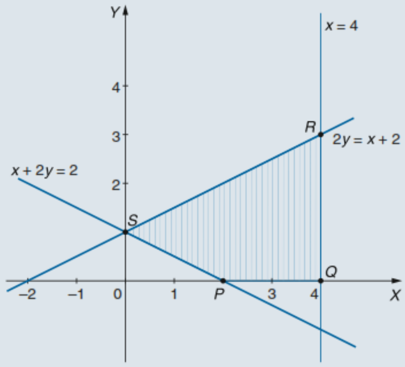
PROGRAMACIÓN LINEAL

ACTIVIDADES RESUELTAS ACCESO UNIVERSIDAD

Halla los vértices del recinto del plano formado por las soluciones del sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ x + 2y \geq 2 \\ 2y \leq x + 2 \end{cases}$$



Dibujamos en un diagrama cartesiano *OXY* las rectas resultantes de convertir las inecuaciones en ecuaciones.

Estas son:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = 4, \quad x + 2y = 2, \quad 2y = x + 2$$

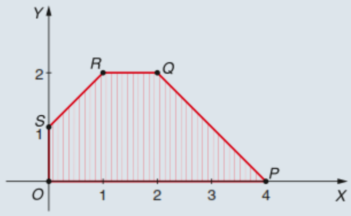
Para cada una de las desigualdades del sistema determinamos su conjunto de soluciones. La intersección de todos estos semiplanos da la región factible o región de soluciones del sistema.

- La intersección de $y = 0$; $x + 2y = 2$ es el punto $P(2, 0)$.
- La intersección de $y = 0$; $x = 4$ es el punto $Q(4, 0)$.
- La intersección de $x = 4$; $2y = x + 2$ es el punto $R(4, 3)$.
- La intersección de $x + 2y = 2$; $2y = x + 2$ es el punto $S(0, 1)$.

Por tanto, los vértices de la citada región factible son los puntos $P(2, 0)$, $Q(4, 0)$, $R(4, 3)$ y $S(0, 1)$.

Determina, mediante inecuaciones lineales, la región del plano del dibujo:

Los vértices de la región dada son $O(0, 0)$, $P(4, 0)$, $Q(2, 2)$, $R(1, 2)$ y $S(0, 1)$. Determinamos las aristas de la región, es decir, las ecuaciones de las rectas determinadas por los vértices y, para cada una de ellas, la inecuación correspondiente.



- La ecuación de la recta que pasa por los vértices *O* y *P* es $y = 0$, y la inecuación asociada es $y \geq 0$.
- La ecuación de la recta que pasa por los vértices *P* y *Q* es $x + y - 4 = 0$. Al cumplirse $0 + 0 - 4 < 0$, el punto $(0, 0)$ está en el semiplano definido por la inecuación $x + y - 4 \leq 0$.
- La ecuación de la recta que pasa por los vértices *Q* y *R* es $y = 2$, y la inecuación asociada es $y \leq 2$.
- La ecuación de la recta que pasa por los vértices *R* y *S* es $x - y + 1 = 0$. Al cumplirse $0 - 0 + 1 > 0$, el punto $(0, 0)$ está en el semiplano definido por la inecuación $x - y + 1 \geq 0$.
- La ecuación de la recta que pasa por los vértices *S* y *O* es $x = 0$, y la inecuación asociada es $x \geq 0$.

Juntando todos los resultados anteriores, obtenemos que la región del plano del dibujo está definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y + 1 \geq 0 \\ y \leq 2 \\ x + y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

■ **Determina los valores máximo y mínimo de la función $z = 2x - 8y$ sometida a las restricciones:**

$$3x - 2y \le 12 \qquad x - 4y \ge -20 \qquad 3x + 2y \le 24 \qquad x + 2y \ge 4 \qquad x \ge 0 \qquad y \ge 0$$

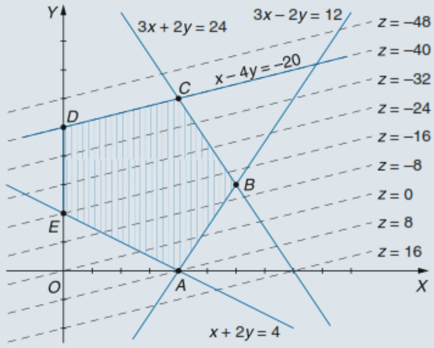
En el gráfico podemos ver la región factible que proporcionan las restricciones. La región convexa está definida por los vértices de coordenadas:

$A(4, 0)$ $\quad B(6, 3)$ $\quad C(4, 6)$ $\quad D(0, 5)$ $\quad E(0, 2)$

Observamos que la línea de nivel que proporciona el valor máximo es la recta de ecuación $2x - 8y = 8$. Esta recta pasa por el vértice $A(4, 0)$.

La línea de nivel que proporciona el valor mínimo es la recta de ecuación $2x - 8y = -40$, que pasa por los vértices $C(4, 6)$ y $D(0, 5)$.

Por tanto, la función objetivo alcanza el máximo en el punto $A(4, 0)$, y el mínimo, en cualquiera de los puntos del segmento determinado por los vértices $C(4, 6)$ y $D(0, 5)$.

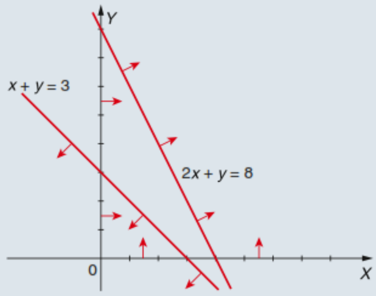


■ **Determina los valores máximo y mínimo de la función $z = 5x - 3y$ sujeta a las restricciones:**

$$\begin{cases} x + y \le 3 \\ 2x + y \ge 8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Podemos ver en el gráfico que las restricciones no proporcionan ningún punto en la región factible.

Nos encontramos ante un programa lineal no factible, es decir, que carece de soluciones.



■ **Determina los valores máximo y mínimo de la función $z = 2x + y$ sometida a las restricciones:**

$$0 \le x \le 6 \qquad 0 \le y \le 10 \qquad 8 \le 2x + y \le 16$$

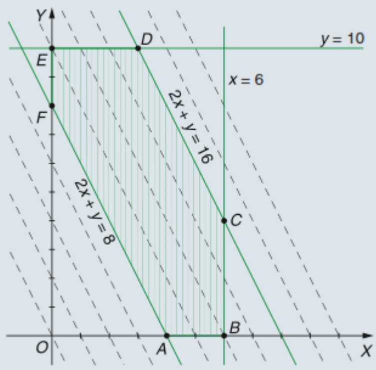
La región factible que delimitan las restricciones podemos observarla en el gráfico. Esta región está delimitada por los vértices:

$A(4, 0)$ $\quad B(6, 0)$ $\quad C(6, 4)$ $\quad D(3, 10)$ $\quad E(0, 10)$ $\quad F(0, 8)$

La línea de nivel que alcanza el valor máximo es la recta de ecuación $2x + y = 16$. Observamos que pasa por los vértices $C(6, 4)$ y $D(3, 10)$.

La línea de nivel que alcanza el valor mínimo es la recta de ecuación $2x + y = 8$. Observamos que pasa por los vértices $A(4, 0)$ y $F(0, 8)$.

Por tanto, la función objetivo alcanza el máximo en cualquiera de los puntos del segmento determinado por los vértices $C(6, 4)$ y $D(3, 10)$, y el valor mínimo, en cualquiera de los puntos del segmento determinado por los vértices $A(4, 0)$ y $F(0, 8)$.



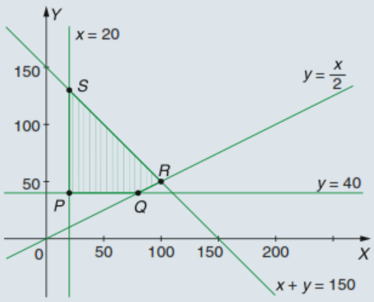
En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se ha de tener almacenado un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje de un bidón de aceite de oliva es de 1 euro, y el de uno de girasol de 0,5 euros, ¿cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo? ¿Y para que el gasto sea máximo?

Llamamos x al número de bidones de aceite de girasol e, y a los de aceite de oliva que se almacenan. Las restricciones del enunciado son:

$x \geq 20$ (bidones de aceite de girasol) $\quad$ $y \geq 40$ (bidones de aceite de oliva)

$y \geq x/2$ (relación entre bidones de aceites diferentes) $\quad$ $x + y \leq 150$ (bidones)

La función objetivo, que refleja el gasto de almacenaje, es $z = 0{,}5x + y$.



El programa lineal a resolver es:

$$\text{optimizar } z = 0{,}5x + y \text{ sujeta a: } \begin{cases} x \geq 20 \\ y \geq 40 \\ y \geq x/2 \\ x + y \leq 150 \\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Los valores de la función objetivo en los vértices $P(20, 40)$, $Q(80, 40)$, $R(100, 50)$ y $S(20, 130)$ son:

$$z_P = 50,\ z_Q = 80,\ z_R = 100 \text{ y } z_S = 140$$

Por tanto, el mínimo de la función objetivo se alcanza para $x = 20$, $y = 40$; y el máximo para $x = 20$, $y = 130$.

En la dieta de un equipo de fútbol se utiliza una composición mínima de 15 unidades de vitamina A y de 15 de vitamina B. En el mercado hay solo dos compuestos, el tipo *X*, con 1 unidad de A y 5 de B, y el tipo *Y*, con 5 unidades de A y 1 de B. El precio del compuesto *X* es de 10 euros y el de *Y* de 30 euros.

¿Qué cantidad hemos de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades de la dieta con un coste mínimo?

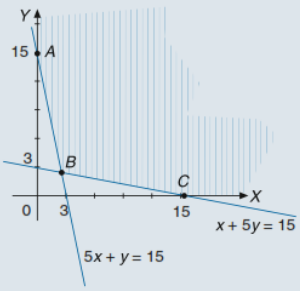
Llamamos x a la cantidad de compuesto *X*, e y a la de compuesto *Y*.

En la tabla podemos ver la información del problema.

	X	Y	
A	1	5	15
B	5	1	15
Precio	10	30	
Cantidad	x	y	

La función objetivo, que da el coste de la dieta, es $z = 10x + 30y$ y está sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + 5y \geq 15 \\ 5x + y \geq 15 \end{cases}$$



Representamos en el gráfico la región factible.

Los vértices de la región factible, que es no acotada, son:

$$A(0, 15) \quad B(5/2, 5/2) \quad C(15,0)$$

Los valores de la función objetivo en estos vértices son:

$$z_A = 450; \quad z_B = 100; \quad z_C = 150$$

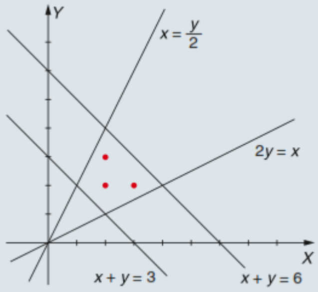
Por tanto, el coste mínimo de la dieta está en el vértice *B*. Necesitamos comprar 2,5 del compuesto *X* y 2,5 del compuesto *Y*.

Una empresa elabora dos productos, cada uno de ellos en una cantidad que es múltiplo de 1 000. Conoce que la demanda, de ambos productos conjuntamente, es mayor que 3 000 unidades y menor que 6 000 unidades. Asimismo, sabe que la cantidad que se demanda de un producto es mayor que la mitad y menor que el doble de la del otro. Si la empresa desea vender toda la producción:

a) ¿De cuántos modos puede organizar la producción?

b) Para obtener los máximos beneficios, ¿de cuánto ha de ser la producción de cada uno de ellos si uno se vende a un precio que es el triple que el del otro?

Las cantidades de los productos deben ser números enteros. Llamamos x al primer producto, e y al segundo, ambos expresados en miles.



Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0;\ x, y \in \mathbb{Z} \\ x + y > 3;\ x + y < 6;\ 2y > x;\ x > y/2 \end{cases}$

a) La organización de la producción son los valores correspondientes a los puntos de coordenadas enteras situados en el interior de la región factible del gráfico. Debe advertirse que las desigualdades de las restricciones son estrictas.

La producción puede organizarse según los valores siguientes:

(2 000, 2 000), (3 000, 2 000) y (2 000, 3 000)

b) Si se vende el segundo producto a un precio triple que el primero, el beneficio será $z = x + 3y$; y, según el gráfico, de esta forma se deberán fabricar 2 000 del primer producto y 3 000 del segundo.

Una empresa dedicada a la fabricación de piezas de automóvil tiene dos factorías que producen, respectivamente, 8 000 y 15 000 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres fábricas que necesitan 10 000, 7 000 y 6 000 piezas, respectivamente. Los costes del transporte, en euros, por pieza, son los que aparecen en la tabla adjunta. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?

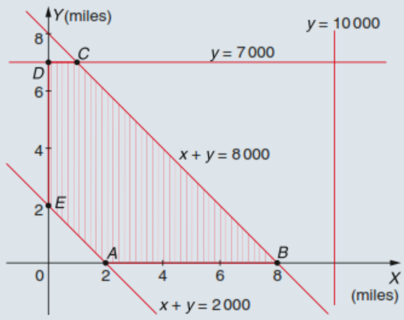
	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3
Factoría 1	6	13	2
Factoría 2	4	4	12

Si llamamos x al número de piezas que entrega la factoría 1 a la fábrica 1, e y al número de piezas que entrega la factoría 1 a la fábrica 2, la distribución de piezas queda según se recoge en el cuadro adjunto y da lugar al programa lineal siguiente:

x	y	$8\,000 - x - y$
$10\,000 - x$	$7\,000 - y$	$-2\,000 + x + y$

Minimizar $z = 12x + 19y + 60\,000$ sujeta a:

$$\begin{cases} x \leq 10000;\ y \leq 7000 \\ x + y \leq 8000 \\ x + y \geq 2000 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$$



El valor mínimo de la función objetivo, $z_A = 84\,000$, se obtiene en el vértice $A(2\,000, 0)$ y la organización del transporte es la que aparece en la tabla siguiente:

2 000	0	6 000
8 000	7 000	0

ACTIVIDADES FINALES

1. Encuentra el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

   a) $x - 2y \leq 10$

   b) $x + 2y \geq 12$

   c) $x \leq 3$

   d) $y \geq -2$

2. Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

   a) $\begin{cases} 3x + y \geq 10 \\ x - 3y \leq 0 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ -x + y \geq 1 \end{cases}$

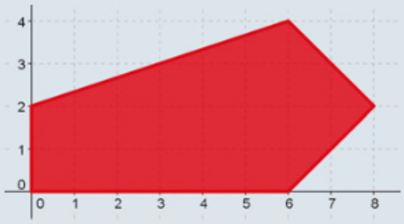
3. Dadas las inecuaciones $y \leq x + 5$, $2x + y \geq -4$, $4x \leq 10 - y$, $y \geq 0$, representa el recinto que limitan y calcula sus vértices.

4. Para el sistema de inecuaciones siguiente, representa el recinto que limitan, calcula sus vértices y determina todos los puntos de coordenadas enteras que se encuentran en el interior del recinto, así como en su frontera.

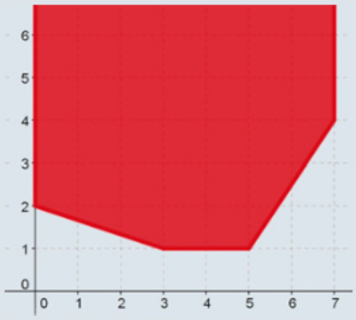
$$\{x - 2y \leq 0,\ x + y \leq 6,\ x \geq 0,\ y \leq 3\}$$

5. ¿Qué sistemas de inecuaciones tienen por solución la región coloreada en cada uno de los gráficos siguientes?

   a)



   b)



6. a) Representa gráficamente la región del plano definida por las inecuaciones:

$$\{0 \leq x,\ 2 \leq y,\ x + y \leq 8,\ -x + y \leq 4\}$$

   b) Halla los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x + 3y$ en dicha región y los puntos en los que se alcanzan.

7. Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\{x \geq 1,\ y \geq x,\ x + y \leq 10,\ 3y - 2x \leq 10\}$$

   a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

   b) ¿En qué punto o puntos de esta región alcanza los valores máximo y mínimo la función $f(x, y) = 2x - 2y + 7$?

8. Sea el sistema de inecuaciones: $\{x + y \geq 2,\ 2x + y \leq 6,\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 4\}$:

   a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones.

   b) Calcula, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función $f(x, y) = 3x + y$ en la región definida por el sistema.

   c) Calcula, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función $g(x, y) = 3x + 3y$ en la región definida por el sistema.

9. Un ahorrador dispone de 4 000 € para invertir en dos tipos de fondos de inversión a cierto plazo. En el fondo A cada participación tiene un coste de 40 € y produce un beneficio de 15 €, mientras que en el fondo B cada participación da un beneficio de 5 € y su coste es de 50 €. Sabiendo que se puede adquirir un máximo de 60 participaciones del fondo A y al menos 40 del fondo B, determina cuántas participaciones de cada fondo se deben comprar para maximizar el beneficio y calcula ese beneficio.

10. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Cada joya tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 24 euros. La tipo B se vende a 30 euros y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si el orfebre solo dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

11. Un deportista solamente puede tomar para desayunar barritas de chocolate y barritas de cereales. Cada barrita de chocolate proporciona 40 gramos de hidratos de carbono, 30 g de proteínas y 200 kcal, mientras que cada barrita de cereales proporciona 80 g de hidratos de carbono, 10 g de proteínas y 100 kcal. El deportista quiere tomar al menos 320 g de hidratos de carbono y 90 g de proteínas, pero no quiere tomar más de 1 000 kcal. El coste de cada barrita de chocolate es de 2 €, mientras que el de cada barrita de cereales es de 1 €.

Determina cuántas barritas de cada tipo tiene que tomar el deportista para desayunar de forma que se cumpla las condiciones anteriores y gaste la menor cantidad de dinero.

12. Tenemos que fertilizar unos terrenos de una finca utilizando dos abonos, A y B. El coste del abono A es 0,9 €/kg, y el abono B cuesta 1,5 €/kg. El abono A contiene un 20 % de nitrógeno y un 10 % de fósforo, mientras que el abono B contiene un 18 % y un 15 %, respectivamente. Para fertilizar los terrenos correctamente necesitamos un mínimo de 180 kg de nitrógeno y 120 kg de fósforo. ¿Cuál es el gasto mínimo que debemos hacer si queremos fertilizar los terrenos de la finca correctamente?

13. Una empresa fabrica dos modelos de sillas de ruedas. Los recursos disponibles y las cantidades requeridas para cada silla se dan en la siguiente tabla:

	Modelo 1	**Modelo 2**	**Disponibilidad**
Horas de mano de obra	2	4	1 000
Unidades de acero	3	1	600
Motores	–	1	200

Si cada silla del modelo 1 da un beneficio de 60 € y cada silla del modelo 2 de 160 €, ¿cuántas unidades de cada modelo se han de fabricar para maximizar el beneficio? La resolución del programa lineal debe hacerse por el método gráfico; además, analiza gráficamente qué ocurre si la disponibilidad de acero se reduce a 410 unidades.

14. Una carpintería elabora dos tipos de muebles, A y B. Cada mueble de tipo A requiere 6 días de trabajo para su elaboración, mientras que cada mueble de tipo B requiere 3 días. Por la estructura organizativa de dicha empresa, cada mes, que consta de 30 días laborables, se pueden elaborar, a lo sumo, 4 muebles de tipo A y 8 de tipo B.

a) ¿Cuántos muebles de cada tipo puede fabricar en un mes para cumplir con todos los requerimientos?

b) Si venden todo lo que fabrican y el beneficio proporcionado por cada mueble tipo A vendido es de 500 €, y por cada mueble de tipo B es de 200 €, ¿cuántos muebles de cada tipo deberían fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuántos tendrían que fabricar para maximizar el número de muebles elaborados?

15. En una ciudad existen dos depósitos de harina A y B y tres panaderías P, Q y R. En el depósito A se almacenan 50 toneladas de harina y en el B 70. Las 120 toneladas que hay en total se reparten del siguiente modo: 30 para P, 50 para Q y 40 para R. El coste, en unidades monetarias, del transporte de una tonelada de un depósito a una panadería viene dado en la tabla adjunta. ¿Cómo debe hacerse la distribución de las 120 toneladas para que el coste del transporte sea mínimo?

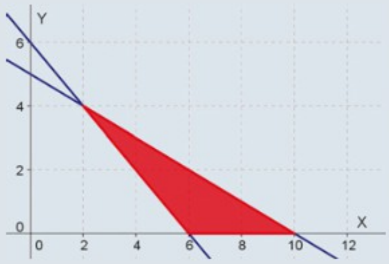
	P	**Q**	**R**
A	8	3	5
B	2	4	4

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD

1. Considera la región sombreada del dibujo:

   a) Determina el sistema de inecuaciones que delimita.

   b) Calcula el valor máximo de la función $z = x + 2y$ en esta región e indica para qué valores se alcanza dicho máximo.



2. a) Represente gráficamente el recinto limitado por las desigualdades siguientes:

   $$\{0 \le y \le 1;\ y - 1 \le x \le 2\}$$

   b) Halla los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -x + 2y$ en dicho recinto, así como los puntos en los que se alcanzan dichos valores.

3. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero solo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autobús grande cuesta 80 € y el de uno pequeño 60 €. ¿Cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible?

4. Una industria papelera elabora dos clases de papel a partir de dos tipos de madera. Las cantidades de madera necesarias por unidad de cada tipo de papel y las disponibilidades semanales (en las unidades adecuadas) aparecen en la tabla:

	Papel 1	**Papel 2**	**Disponibilidades**
Madera 1	8	8	64
Madera 2	4	8	50

   Si el beneficio neto por cada unidad de papel es de 100 000 y 200 000 unidades monetarias, respectivamente, ¿qué cantidad de papel de cada clase nos dará un beneficio máximo?

   La resolución del programa lineal debe hacerse por el método gráfico; además, analiza gráficamente qué ocurre si las disponibilidades de madera 1 se reducen a 50 unidades.

5. Un cadena de supermercados compra naranjas a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden naranjas a 1 000 y 1 500 euros por tonelada, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7; y, para satisfacer la demanda, la cadena debe comprar en total como mínimo 6 toneladas. La cadena debe comprar al distribuidor A como máximo el doble de naranjas que al distribuidor B. ¿Qué cantidad de naranjas debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste? Determina dicho coste mínimo.

6. Un agricultor estima que el cuidado de cada metro cuadrado cultivado de lechugas requiere semanalmente 45 minutos, mientras que el de coles exige 50. Dispone de un terreno de 40 m^2 de extensión que puede dedicar total o parcialmente al cultivo de las dos verduras, pero quiere plantar al menos 3 m^2 más de coles que de lechugas. El metro cuadrado de lechugas le reporta un beneficio de 3 €, mientras que el de coles le proporciona 4 €, planificando obtener al menos un beneficio de 60 €. ¿Cuánta extensión le interesa plantar de cada verdura si su objetivo es que el tiempo dedicado al cuidado de cada cultivo sea mínimo?

7. Un tendero va al mercado central con su furgoneta, que puede cargar 700 kg, y con 500 € en el bolsillo, a comprar fruta para su tienda. Encuentra manzanas a 0,80 €/kg y naranjas a 0,50 €/kg. Él calcula que podrá vender las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,58 €/kg. ¿Qué cantidad de manzanas y de naranjas le conviene comprar si quiere obtener el mayor beneficio posible?

AUTOEVALUACIÓN

1. El punto que pertenece a la región de soluciones del sistema de inecuaciones siguientes, es:

$$\{x + 2y \geq 4; -x + y \leq 2; 2x + y \leq 5\}$$

a) (0, 3) b) (1, 2) c) (2, 3)

2. Los vértices de la región factible del sistema de inecuaciones siguientes, son:

$$\{x + y \geq 4; 3x + y > 6; x + 3y > 6; x \geq 0; y \geq 0\}$$

a) (6, 0); (3, 1); (1, 3) y (0, 6) b) (3, 0); (6, 1); (1, 6) y (0, 3) c) (0, 0); (3, 3) y (6, 6)

3. El valor máximo de la función $z = x + 5y$, con las condiciones siguientes, es:

$$\{x - 2y \geq 4; 2x - y \geq 6; x \geq 0; 0 \geq y \geq 1\}$$

a) 9 b) 10 c) 11

4. Una fábrica se dedica a la confección de colchas y cortinas. El fabricante dispone de 1 000 m de tela y 800 h de trabajo. Cada colcha requiere 2 m de tela y 4 h de confección, mientras que para elaborar una cortina son precisas 3 h de trabajo y 4 m de tela. El fabricante cobra por cada colcha 80 € y por cada cortina 120 €. El beneficio máximo que obtiene, con estas condiciones, es:

a) 30 400 € b) 30 000 € c) 16 000 €

5. En una encuesta realizada por una televisión local se ha detectado que un programa de 20 min de variedades y 1 min de publicidad capta 30 000 espectadores, mientras que otro programa de 10 min de variedades y 1 min de publicidad capta 10 000 espectadores. Para un determinado período, la dirección de la empresa decide dedicar, como máximo, 80 min de variedades y 6 min de publicidad. El número de veces que tiene que aparecer cada programa con objeto de captar el máximo número de espectadores es:

a) 2 veces el 1.º y 4 el 2.º b) 4 veces el 1.º y 0 el 2.º c) 0 veces el 1.º y 6 el 2.º